UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Marília

CULTURA ACADÊMICA
Editora

# A Organização do Universo Matemático por Meio de Modelos de Segunda Ordem

Marcelo Reicher Soares

**Como citar:** SOARES, M. R. A organização do universo matemático por meio de modelos de segunda ordem. *In*: ALVES, M. A.; GRÁCIO, M. C. C.; MARTÍNEZ-ÁVILA, D. (org.). **Informação, conhecimento e modelos**. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2017. p. 99-110.
DOI: https://doi.org/10.36311/2017.978-85-86497-29-2.p99-110

# A Organização do Universo Matemático por Meio de Modelos de Segunda Ordem

Marcelo Reicher Soares
reicher@fc.unesp.br

## 1. Introdução

A necessidade de sobrevivência do homem o conduz à construção de instrumentos de intervenção e controle da realidade. Os primeiros desses instrumentos são as ferramentas de modelação do meio físico, como pás, enxadas, arados e outros, os quais mimetizam a ação do corpo do homem, potencializando sua capacidade de intervir no ambiente, conforme seja seu interesse. Apesar de serem eficientes e revolucionários, na história da humanidade, esses instrumentos não deixam de ser rudimentares, tendo um alcance limitado e promovendo a intervenção apenas por ação física direta. Constituem, assim, ferramentas com potencial limitado, não atendendo às crescentes necessidades de controle derivadas do progresso humano.

Um instrumento antigo que já continha, intuitivamente, um alto grau de elaboração conceitual é a noção primitiva de contagem. Assim é que o pastor de ovelhas, com o objetivo de não perder nenhum de seus bens preciosos, faz corresponder a cada ovelha uma pedrinha, armazenando esta última em uma bolsa. Ao final do dia, ao recolher os animais, verifica se tem uma ovelha para cada pedrinha em sua bolsa, de modo a preservar seu rebanho. Essa ideia simples de correspondência é abstraída pelo conceito de função e os números naturais são criados como modelos para contagem. Posteriormente, os números reais são desenvolvidos com o objetivo de medir grandezas como áreas e comprimentos.

Em um processo ininterrupto, instrumentos mais sofisticados são exigidos e desenvolvidos, em cuja elaboração os elementos abstratos constituem, cada vez mais, a matéria-prima. No que segue, com a finalidade de

Marcos Antonio Alves, Maria Claudia Cabrini Grácio, Daniel Martínez-Ávila (Org.). *Informação, conhecimento e modelos.* Coleção CLE, v. 78, pp. 99-108, 2017.

https://doi.org/10.36311/2020.978-85-86497-29-2.p99-110

traçar um panorama de tal processo, em particular no ambiente da matemática, apresentamos uma abordagem intuitiva para o conceito de estrutura conceitual e um seu caso particular, os modelos. Tornamos preciso o que entenderemos por modelos de primeira e segunda ordem, exemplificando, a partir de situações particulares, como os mesmos surgem e são utilizados.

## 2. Estrutura Conceitual e Modelo

O processo de usar pedrinhas para contar ovelhas pode ter funcionado bem enquanto o rebanho era pequeno, mas, com o passar do tempo, surge a necessidade de adequar a ferramenta às novas demandas. Como carregar pedrinhas suficientes para associá-las a um rebanho gigante de gado, por exemplo? Situações análogas a essa se proliferam, conduzindo à necessidade do uso de ferramentas mais elaboradas e eficientes, as estruturas conceituais, as quais operam em toda área de ação do homem, buscando organizar e compreender o formidável volume de informações que permeia as sociedades modernas. A noção de estrutura conceitual é suficientemente complexa, de modo que seu estudo exaustivo demandaria um trabalho específico sobre o tema: basta fazer uma pesquisa na internet, para verificar a infinidade de abordagens encontradas. Para os nossos propósitos, pedimos que o leitor assuma uma concepção intuitiva exposta a seguir (ver GARDING, 1977).

Conceberemos *estrutura conceitual* como um conjunto de conceitos abstratos, ordenados segundo algum princípio, interligados mediante regras e hierarquizados conforme interesses específicos.

Assim compreendidas, tais estruturas possibilitam-nos, com grau de precisão cada vez maior, organizar, explicar, prever e intervir na realidade, como veremos nos exemplos que introduziremos neste trabalho. Adotando a concepção acima, podemos encarar a linguagem como um exemplo de estrutura conceitual, uma das mais importantes desenvolvidas pela humanidade. Nela, fazemos corresponder sons com significados (palavras) e às combinações de sons, fazemos corresponder significados mais complexos (frases bem formadas), mediante regras gramaticais construtivas.

Não menos importante que a linguagem, temos a escrita. Esta pode, grosseiramente, ser definida como a representação da linguagem por meio de signos gráficos, isto é, uma correspondência entre sons e signos gráficos. Obviamente, a linguagem e a escrita são conceitos por demais complexos, para que um enquadramento dos mesmos apenas como estruturas conceituais possa caracterizá-los plenamente. No entanto, o esforço para enxergá-las como estruturas conceituais é, no mínimo, bastante interessante. Note-se ainda a diversidade de linguagens e escritas desenvolvidas pela humanidade, ao longo do tempo, sempre objetivando armazenar e transmitir os conhecimentos obtidos. Tal objetivo, por si só, justifica todo o esforço despendido na empreitada.

Uma estrutura conceitual criada com o objetivo de intervir em uma fração específica da realidade, fornecendo um instrumento capaz de organizá-la em diversos de seus aspectos, será chamada de *modelo* para essa realidade.

Nesse sentido, podemos sustentar que a língua portuguesa é um exemplo de modelo (melhor seria empregar metamodelo, com a compreensão intuitiva que tal termo tenha), uma vez que ela é uma estrutura conceitual que atende à concepção que apresentamos, para as pessoas que dela fazem uso.

De uma maneira geral, um modelo opera representando abstratamente uma parte da realidade, alguns de seus aspectos, que, num dado instante, seja interessante para o observador entender e controlar, como contar ovelhas, por exemplo.

Chamaremos a compreensão alcançada, aplicando leis lógicas aos conceitos de um modelo, de *teoria* desse modelo. Assim é que, em Matemática, temos que a álgebra linear é a teoria que compila os resultados obtidos a partir dos espaços vetoriais, e estes últimos são modelos úteis para o estudo de diversos problemas em álgebra, análise e geometria.

Além da Matemática, diversas outras ciências, como a Física, a Biologia, e a Química, por exemplo, agruparam ao longo da história muitos modelos, criados para compreender a realidade segundo suas necessidades e os seus pontos de vista específicos. Aqui nos interessa modelos que estão no escopo da Matemática, uma vez que é nessa ciência que podemos identificar claramente o que chamaremos de modelos de segunda ordem.

Um exemplo significativo, na área da Matemática, do que estamos abordando é o modelo dado pelo conjunto dos números naturais, com base no qual podemos compreender, explicar e prever, em muitas situações, respondendo a perguntas que envolvem as necessidades de contagem e de ordenação. Decorre de sua criação que não precisamos mais da bolsa com as pedrinhas, que o pastor usava para manter o rebanho; ela é substituída pela ferramenta abstrata dos números naturais. Basta, por conseguinte, contar as ovelhas, isto é, estabelecer uma correspondência biunívoca (uma função bijetiva) entre o conjunto das ovelhas e um subconjunto dos números naturais do tipo $I_n = \{1,2,\ldots,n\} \subset N$, para um "$n$" apropriado. A função bijetiva considerada será chamada de uma contagem, e é possível argumentar matematicamente, de maneira bastante convincente (demonstrar), que o "$n$" encontrado independe da particular contagem (ver LIMA, 2016). Após esse processo, afirmamos que o pastor possui "$n$" ovelhas e ele pode contá-las sempre que quiser, usando ainda essa informação para planejar formas de atender às demandas de seu rebanho de ovelhas. Conhecendo o número de ovelhas que tem, ele pode desenvolver uma logística para auxiliar na administração. Rações, vacinas e outros itens são adquiridos em quantidades específicas, economizando e suprindo com precisão suas necessidades.

Os modelos, em geral, apresentam limitações em suas aplicações, como uma consequência do fato de que, em sua construção, simplificamos a realidade, desprezando alguns (em geral muitos) de seus aspectos, limitações as quais nos conduzem ao desenvolvimento de novos ou à ampliação dos já existentes.

Como exemplo de uma situação capaz de levar à ampliação de um modelo, podemos citar a necessidade de medir grandezas contínuas, como comprimentos e áreas. Tal necessidade teve como resposta a construção do conjunto dos números reais, que estende o modelo dos números naturais, ampliando sua performance.

Sem nos alongarmos demasiadamente nas particularidades da construção dos modelos, lembramos que, no século XX, ocorreu uma sistematização da Matemática (ver EVES, 2002), a qual foi levada a cabo por meio de uma organização do universo de seus elementos. Assim, a realidade que foi organizada, nessa situação, era composta pelos objetos abstratos da Matemática, ao invés dos objetos concretos da vida diária, considerados anteriormente, caracterizando o que chamamos de modelo de segunda ordem. Dentro dessa perspectiva, o conjunto dos números reais, por exemplo, sendo uma das entidades do universo matemático, é classificado como um caso particular de combinação de estruturas abstratas (grupo, anel, corpo, espaço métrico), as quais descrevem e agrupam famílias de entidades. Dessa forma, o conjunto dos números reais satisfaz propriedades que o classificam como um corpo, ordenado e completo.

Fruto da sistematização, citada acima, os conceitos de conjunto, grupo, anel, espaço vetorial e espaço topológico são exemplos de modelos de segunda ordem. Amplamente usados, tais conceitos viabilizaram a organização e o ensino das entidades abstratas do universo matemático, constituindo uma linguagem universal.

A seguir, ilustramos brevemente a diferença entre o que entendemos por modelos matemáticos de primeira e segunda ordens. Para esse fim, focalizaremos as equações diferenciais como um modelo para o estudo do crescimento populacional e os espaços vetoriais como modelo para resolução de equações diferenciais.

## 3. Modelo de primeira ordem

O que aqui chamamos de modelos de primeira ordem são estruturas conceituais que objetivam dar-nos respostas a perguntas de cunho prático e uso imediato. Assim, um administrador público tem a necessidade de saber o tamanho de sua população e dispor de uma maneira de saber como essa população crescerá ou decrescerá, com o passar do tempo, condição fundamental para que ele possa planejar, em longo prazo, as necessidades da sociedade que administra, norteando as estratégias de políticas públicas nos diversos níveis de administração. Outro caso seria o controle do número de elementos de uma população de bactérias em um laboratório, visando a aferir a eficácia de agentes que almejam controlar sua proliferação.

O modelo usado para expressar o comportamento numérico da população (quer de humanos, quer de bactérias), ao longo do tempo, é chamado de "modelo para crescimento populacional". Abstratamente falando, nosso objetivo é encontrar uma função, a qual denotaremos por $P$, que forneça a população, que denotaremos por *P(t)*, em um dado instante de tempo, que denominamos *t*. Abaixo descrevemos, simplificadamente, como se dá o processo.

A função que buscamos será um modelo de primeira geração, visto que nos dará respostas de cunho prático e uso imediato. Considerações serão feitas para que a função-resposta obtida para o problema nos dê as informações que julgamos úteis, de uma maneira coerente. Dentre as características que julgamos razoáveis exigir em nossa busca, está a de que o crescimento populacional é diretamente proporcional ao número de indivíduos, num dado instante de tempo. O coeficiente de proporcionalidade pode ser positivo ou negativo, conforme tenhamos a população crescendo ou decrescendo. Além disso, é fundamental levar em conta os recursos naturais e estratégicos à disposição, para a sobrevivência da população.

As ponderações acima são traduzidas tecnicamente para o nosso modelo, assinalando que procuramos uma função $P:[0,+\infty)\to R$, a qual, a cada instante de tempo *t*, associe a população, *P(t)*.

Se denotarmos por $k$ a constante de proporcionalidade mencionada acima, teremos que a taxa de variação da função que descreve a população, a qual identificaremos por $\frac{dP}{dt}(t)$ , será $\frac{dP}{dt}(t) = kP(t)$. Esta última equação é chamada de *modelo exponencial de população*. O nome deriva do fato de que a função que resolve tal equação tem a forma exponencial, isto é, $P(t)=Ce^{kt}$ . Essa resposta, embora forneça uma boa aproximação para a realidade, apresenta incongruência com os dados experimentais obtidos no estudo do crescimento de colônias de bactérias, por exemplo. O inconveniente decorre da circunstância de que a função obtida, quando $C > 0$ e $k > 0$, prevê um crescimento ilimitado da população, com o passar do tempo. Tecnicamente, escrevemos $\lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$, expressando que "o limite da função *P(t)* é infinito, na medida em que o tempo tende para o infinito". Sabemos, por aferições laboratoriais, que isso na realidade não acontece, isto é, as populações, quer humana, quer de bactérias, tendem a se estabilizar em torno de um limite máximo, o qual está associado a diversos fatores que viabilizam, ou não, a sobrevivência.

Essa constatação nos leva à necessidade de encontrar uma maneira de melhorar a resposta. No caso, buscaremos retratar, na equação, os recursos naturais à disposição da população, uma vez que estes têm grande influência no seu comportamento numérico. Para isso, incluiremos um número fixo, o qual denotaremos por $M$, que indicará a população máxima possível, levando em conta os recursos naturais disponíveis.

Nesse sentido, refinamos as características da função que procuramos e, para traduzir matematicamente tais considerações, reescrevemos a equação, anteriormente obtida, de modo que $(*)\frac{dP}{dt}(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$, isto é, a taxa de variação da população, agora apresenta um novo fator $\left(1-\frac{P(t)}{M}\right)$, o qual atua de maneira a retratar formalmente as considerações sobre os recursos vitais. Nesse caso, quando avaliarmos a situação em que o tempo passa infinitamente, t $\rightarrow +\infty$, o comportamento da população *P(t)* será o de aproximar-se de $M$, tendo como consequência que o fator $\left(1-\frac{P(t)}{M}\right)$ se aproximará de zero, o que acarreta que a taxa de crescimento da população, $\frac{dP}{dt}(t)$, também se aproxima de zero. O acréscimo do fator $\left(1-\frac{P(t)}{M}\right)$ à nossa equação torna nosso modelo mais coerente com a realidade, embora dificulte, e muito, a obtenção da solução.

Com essas alterações, a equação (*) obtida é chamada de *modelo logístico de população*. Em Matemática, uma equação que envolve uma função incógnita (no caso, *P(t)* ), e sua derivada ($\frac{dP}{dt}(t)$) é chamada de equação diferencial. Assim, para resolvermos o problema e encontrarmos a função resposta, temos que resolver uma equação diferencial.

A equação obtida é um modelo de primeira ordem, visto que, quando resolvida, fornecerá uma ferramenta prática para a intervenção imediata numa situação do cotidiano (seja da administração pública, seja na profilaxia das bactérias). Com base nas dificuldades em resolver equações desse tipo, são desenvolvidos modelos de segunda ordem, os quais fornecerão instrumentos para atuarmos em um novo ambiente, em que os indivíduos são as diversas equações diferenciais, provenientes de variados problemas similarmente modelados. Nossa meta, agora, com os modelos de segunda ordem, é organizar esse novo ambiente, encontrando ferramentas para modelar e solucionar as equações diferenciais.

## 4. Modelo de segunda ordem

Descreveremos, muito brevemente, como empregar os espaços vetoriais e sua teoria, a álgebra linear, para modelar o problema matemático de solucionar equações diferenciais (ver BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Consideramos a família de equações diferenciais ordinárias, chamadas de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes. As equações que pertencem a essa família têm a forma geral (#) $a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, em que os $a_i$ são números reais constantes dados e $y$ é uma função incógnita com variável independente $x$.

Nosso objetivo é encontrar uma função $f(x)$, que, substituída na equação (#), no lugar de $y$, faça com que $a_n f^{(n)}(x) + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$, para todo $x$ em um intervalo $I$ da reta.

Posto dessa forma, a estratégia adotada para resolver equações do tipo de (#) será tomarmos o espaço vetorial $C^n(I)$, formado por todas as funções que têm derivadas contínuas, até ordem $n$, sobre o intervalo $I$ da reta (intervalo este no qual deverá estar definida a função solução da equação). Além disso, introduzimos um operador diferencial $L$, definido por $L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dx} + a_o$, o qual nada mais é que uma função que atua sobre o espaço vetorial $C^n(I)$ e toma valores no espaço vetorial $C^0(I)$.

Demonstra-se que tal operador diferencial é uma transformação linear (ver BOYCE; DiPRIMA, 2015), de sorte que encontrar as soluções da equação diferencial (#) se resume, agora, em encontrar o núcleo desse operador linear $L$ (isto é, encontrar toda função $f(x)$ para a qual $L[f(x)] = 0$.

No contexto da teoria de álgebra linear, a qual envolve os espaços vetoriais, as transformações lineares e o núcleo de operadores, temos muitos recursos para encontrar o tal núcleo e, como consequência, resolvermos a equação diferencial (#).

Dessa forma, fica caracterizada a álgebra linear como um modelo de segunda ordem, na medida em que transferimos a busca da solução de um problema prático para um problema abstrato de obtenção do núcleo de um operador linear.

## 5. Considerações finais

A distinção entre os modelos de primeira e segunda gerações é bastante sutil e visa a atender a critérios didáticos e organizacionais. Eles exemplificam como, ao longo do tempo, ocorreu uma evolução notável nos instrumentos utilizados pelo homem, para satisfazer as demandas de sua sociedade cada vez mais complexa.

A proliferação dos modelos de segunda ordem, que é característica da sociedade científica moderna, no caso específico da Matemática, nos conduziram para uma situação na qual podemos considerar tais estruturas como as unidades organizacionais do universo da Matemática, facilitando seu estudo e desenvolvimento.

## Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* Rio de Janeiro: LTC, 2015.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Universidade de Campinas-UNICAMP, 2002.

GARDING, L. *Encontro com a Matemática*. Brasília: Editora Universidade de Brasilia, 1977.

LIMA, E. L. *Curso de Análise.* V. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

# Parte II
# Informação, conhecimento e complexidade