UNESP UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Marília

CULTURA ACADÊMICA
Editora

Ultrafiltros e uma Interpretação Determinística para o Operador de Conhecimento K

Hércules de Araújo Feitosa
Ângela Pereira Rodrigues Moreira

Como citar: FEITOSA, H. de A.; MOREIRA, A. P. R. Ultrafiltros e uma interpretação determinística para o operador de conhecimento K. *In*: ALVES, M. A.; GRÁCIO, M. C. C.; MARTÍNEZ-ÁVILA, D. (org.). **Informação, conhecimento e modelos**. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2017. p. 57-78.
DOI: https://doi.org/10.36311/2017.978-85-86497-29-2.p57-78

Ultrafiltros e uma Interpretação Determinística para o Operador de Conhecimento K

Hércules de Araújo Feitosa
haf@fc.unesp.br
Ângela Pereira Rodrigues Moreira
angela.p.rodrigues@bol.com.br

Introdução

De um modo bastante geral, os contemporâneos sistemas lógicos procuram formalizar numa linguagem clara, com alta frequência em linguagens formais, aspectos relevantes da consequência em determinado contexto.

A tradicional lógica clássica põe ênfase na noção de verdade. E a sua relação de consequência deve conduzir de condições verdadeiras em conclusão verdadeira, de modo a preservar a verdade. Lógicas não clássicas podem ampliar esse espectro de investigação e, como destacado, trata ainda da consequência, mas não necessariamente da verdade. Essas consequências preservam a validade de certas noções claras para cada lógica. Por exemplo, uma lógica modal deôntica trata de aspectos das leis: o que é obrigatório, o que é permitido e o que é proibido. Uma lei não é verdadeira nem falsa. Então, tal lógica procura desvendar o que deve valer num contexto em que certas leis são aceitas e devem ser observadas.

Os sistemas formais, que constituem as muitas lógicas contemporâneas, procuram primeiro uma linguagem para formalizar as noções centrais de cada contexto e, posteriormente, dar um entendimento razoável da consequência para aquele contexto.

Lógica Epistêmica é um caso especial de lógica modal, que tem a incumbência de investigar e formalizar, no contexto lógico, o que se pode

Marcos Antonio Alves, Maria Claudia Cabrini Grácio, Daniel Martínez-Ávila (Org.). *Informação, conhecimento e modelos.* Coleção CLE, v. 78, pp. 57-78, 2017.

https://doi.org/10.36311/2020.978-85-86497-29-2.p57-78

conhecer ou como tratar o conhecimento. Existem diferentes versões de lógicas epistêmicas que surgiram e foram desenvolvidas no século XX, todas elas desenvolvidas no ambiente das lógicas modais.

De um modo geral, para alguma lógica epistêmica, concebemos um sistema formal simples para investigações sobre a estrutura do conhecimento, seus limites, possibilidades e propriedades. Naturalmente, há interesse na relação existente entre as versões de lógicas epistêmicas e a epistemologia. Busca-se explicitar como aspectos da geração de conhecimento podem ser sintetizados e formalizados, numa particular lógica epistêmica.

Neste artigo, interpretamos o operador modal de conhecimento K, numa classe de estruturas matemáticas bastante conhecida, os ultrafiltros. Desse modo, pensamos que cada ultrafiltro pode nos dar algum entendimento do caráter do operador de conhecimento K. Para maiores detalhes, ver, por exemplo, Chellas (1980).

Para tanto, iniciamos, na primeira seção, com o conceito de ultrafiltro. Na segunda seção, apresentamos a interpretação pretendida para K nos ultrafiltros. Já na terceira seção, focalizamos uma lógica proposicional e modal associada aos ultrafiltros, a qual pode ser interpretada como uma lógica epistêmica e determinística. Na última seção, mostramos elementos da adequação da lógica modal proposta e os modelos algébricos que contemplam aspectos dos ultrafiltros sobre álgebras booleanas.

1. Filtros e ultrafiltros em álgebras de Boole

Nesta seção, explicitamos os conceitos de filtro e ultrafiltro em álgebras de Boole, bastante conhecidos na literatura sobre lógica algébrica, os quais utilizaremos para fundar os tópicos essenciais do artigo.

Definição 1.1: *Álgebra de Boole* é uma estrutura algébrica do tipo $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$, em que B é o domínio que conta com as constantes 0 e 1, e estão definidas sobre B uma operação unária $\sim$, o complemento, e duas operações binárias $\wedge$, a conjunção, e $\vee$, a disjunção, de maneira que para todos $a, b, c \in B$ valem:

(i) $a \vee b = b \vee a$

(ii) $a \wedge b = b \wedge a$

(iii) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(iv) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
(v) $a \vee 0 = a$
(vi) $a \wedge 1 = a$
(vii) para cada $a \in$ B, existe $\sim a \in$ B tal que $a \vee \sim a = 1$ e $a \wedge \sim a = 0$.

Seja E um conjunto não vazio. Um exemplo de álgebra de Boole é $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(E), {}^{C}, \cap, \cup, \varnothing, E)$, em que o seu domínio é o conjunto das partes de E, denotado por $\mathcal{P}(E)$; $\wedge$ é a operação de intersecção de conjuntos $\cap$; $\vee$ é a operação de união de conjuntos $\cup$; $\sim$ é a operação de complementação de conjuntos ^{C}; o zero é o conjunto vazio $\varnothing$ e o um é o conjunto E.

Outro exemplo de álgebra de Boole é (B, $\sim$, $\wedge$, $\vee$, 0, 1), em que B é o conjunto das classes de equivalência de sentenças proposicionais (a proposição p é equivalente a q se, e somente se, $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia); $\wedge$, $\vee$ e $\sim$ são, respectivamente, os conectivos da lógica proposicional clássica sobre as classes de equivalência de B e (conjunção), ou (disjunção) e não (negação); 0 é a classe de equivalência das sentenças logicamente equivalentes a $p \wedge \sim p$ (contradições) e 1 é a classe de equivalência das sentenças logicamente equivalentes a $p \vee \sim p$ (tautologias).

Seja $\mathcal{B}$ = (B, $\sim$, $\wedge$, $\vee$, 0, 1) uma álgebra de Boole e $a, b \in$ B. Em $\mathcal{B}$ está sempre definida uma relação de ordem parcial $a \leq b$ (a menor ou igual a b) tal que:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Definição 1.2: Seja $\mathcal{B}$ = (B, $\sim$, $\wedge$, $\vee$, 0, 1) uma álgebra de Boole. Um subconjunto não vazio $\mathbf{F} \subseteq$ B é um *filtro* em $\mathcal{B}$ se para todos $a, b \in$ B:

(i) $a, b \in \mathbf{F} \Rightarrow a \wedge b \in \mathbf{F}$
(ii) $a \in \mathbf{F}$ e $a \leq b \Rightarrow b \in \mathbf{F}$.

O conceito de filtro traz duas noções importantes, a noção de filtrar ou separar elementos e que esses elementos separados apontam para cima, pois, se algum elemento está em **F**, todos os maiores que ele também lá estão.

Como a álgebra da definição é de Boole, o conceito de filtro separa as proposições que tendem para 1, aquelas que são verdadeiras.

A definição acima poderia ser dada através de outras sentenças equivalentes. As duas proposições que seguem nos confirmam esse fato.

Proposição 1.3: Sejam $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e $\mathbf{F}$ um subconjunto não vazio de B. A condição (ii) da Definição 1.1 é equivalente à condição:

(a) para todos $a, b \in B$, $a \in \mathbf{F} \Rightarrow a \vee b \in \mathbf{F}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Para todos $a, b \in B$, se $a \in \mathbf{F}$, como $a \leq a \vee b$, então, pela condição (ii) da Definição 1.1, segue que $a \vee b \in \mathbf{F}$.

($\Leftarrow$) Se $a, b \in B$ e $a \leq b$, então $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$. Como $a \in \mathbf{F}$, então da condição (a), segue que $a \vee b \in \mathbf{F}$. Portanto, se $a \in \mathbf{F}$ e $a \leq b$, então $b \in \mathbf{F}$. ■

Proposição 1.4: Seja $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ uma álgebra de Boole. A condição (ii) da Definição 1.1 é equivalente à condição:

(b) para todos $a, b \in B$, $a \wedge b \in \mathbf{F} \Rightarrow a \in \mathbf{F}$ e $b \in \mathbf{F}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $a \wedge b \in \mathbf{F}$, como $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$, então, pela condição (ii) da Definição 1.1, $a \in \mathbf{F}$ e $b \in \mathbf{F}$.

($\Leftarrow$) Se $a \leq b$, então $a \wedge b = a$. Como $a \in \mathbf{F}$, então $a \wedge b \in \mathbf{F}$. Logo, $b \in \mathbf{F}$. ■

Proposição 1.5: Se $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole e $a \in B$, então:

(i) o conjunto $a^{\rightarrow} = \{b \in B : b \geq a\}$ é um filtro;

(ii) se $\mathbf{F} \subseteq B$ é um filtro, então $a \in \mathbf{F} \Leftrightarrow a^{\rightarrow} \subseteq \mathbf{F}$.

Demonstração: (i) Sejam $b, c \in B$. Se $b, c \in a^{\rightarrow}$, pela lei de formação de $a^{\rightarrow}$, então $b \geq a$ e $c \geq a$ e, daí, $b \wedge c \geq a \wedge c \geq a \wedge a = a$. Logo, $b \wedge c \in a^{\rightarrow}$. Agora, se $b \in a^{\rightarrow}$ e $c \geq b$, pela lei de formação de $a^{\rightarrow}$, $b \geq a$ e, dessa forma, $c \geq a$. Logo $c \in a^{\rightarrow}$. Deste modo, $a^{\rightarrow} = \{b \in B : b \geq a\}$ é um filtro.

(ii) ($\Rightarrow$) Se $a \in \mathbf{F}$ e $a \leq b$, pela definição de filtro, $b \in \mathbf{F}$. Logo, $\mathbf{F}$ tem como elementos todos os elementos de $a^{\rightarrow}$, ou seja, $a^{\rightarrow} \subseteq \mathbf{F}$.

($\Leftarrow$) Se $a^{\rightarrow} \subseteq \mathbf{F}$, como $a \in a^{\rightarrow}$, então $a \in \mathbf{F}$. ■

Definição 1.6: O filtro $a^{\rightarrow}$ é denominado *filtro principal gerado por a*.

Proposição 1.7: Se $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq B$ é um filtro, então:

(i) o conjunto $\{1\} \subseteq$ B é um filtro de $\mathcal{B}$
(ii) o conjunto $\{1\} \subseteq$ B está contido em todo filtro de $\mathcal{B}$.

Demonstração: (i) $\{1\} = 1^{\rightarrow}$.

(ii) Seja **F** um filtro qualquer de $\mathcal{B}$. Como $1 \in$ B e para todo $a \in$ **F**, segue que $a \leq 1$ e, então, pela condição (ii) da Definição 1.1, segue que $1 \in$ **F**. Logo, $\{1\} \subseteq$ **F**, para todo **F** de $\mathcal{B}$. ■

Proposição 1.8: Sejam $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e S $\subseteq$ B. A intersecção de todos os filtros de $\mathcal{B}$ que contêm S é um filtro.

Demonstração: Escrevemos assim $[S] = \cap \{\mathbf{F}_\lambda \subseteq B : \mathbf{F}_\lambda$ é um filtro de B e $S \subseteq \mathbf{F}_\lambda\}$. Precisamos verificar que [S] é um filtro de $\mathcal{B}$. Sejam a, $b \in$ B.

Se a, $b \in [S]$, então, para todo λ, temos que a, $b \in \mathbf{F}_\lambda$. Como cada $\mathbf{F}_\lambda$ é filtro, então $a \wedge b \in \mathbf{F}_\lambda$. Portanto, $a \wedge b \in [S]$.

Se $a \in [S]$ e $a \leq b$, então, para todo λ, $a \in \mathbf{F}_\lambda$. Como cada $\mathbf{F}_\lambda$ é filtro, então $b \in \mathbf{F}_\lambda$ e, portanto, $b \in [S]$.

Logo, $[S] = \cap \{ \mathbf{F}_\lambda \subseteq B : \mathbf{F}_\lambda$ é um filtro e $S \subseteq \mathbf{F}_\lambda\}$ é filtro de $\mathcal{B}$. ■

Definição 1.9: O filtro [S] é denominado *filtro gerado por S*.

Definição 1.10: Sejam $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e **F** $\subseteq$ B um filtro de $\mathcal{B}$. O filtro **F** é *próprio* se **F** $\neq$ B.

Definição 1.11: Sejam $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e **F** $\subseteq$ B um filtro. O filtro **F** é *primo*, se ele é próprio e:

(c) para todos a, $b \in$ B, $a \vee b \in \mathbf{F} \Rightarrow a \in \mathbf{F}$ ou $b \in \mathbf{F}$.

Definição 1.12: Sejam $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e **F** $\subseteq$ B um filtro. O filtro **F** é *maximal,* se ele é próprio e:

(d) para todo filtro **G** de $\mathcal{B}$, se $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{G}$, então $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ ou $\mathbf{G} = B$.

Definição 1.13: Sejam $\mathcal{B} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e **F** $\subseteq$ B um filtro. O filtro **F** é *irredutível* se ele é próprio e:

(e) para todos dois filtros $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2 \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}_1$ ou $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2$.

Proposição 1.14: Sejam $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e **F** $\subseteq$ B um filtro, então:

(i) $1 \in \mathbf{F}$
(ii) $\mathbf{F}$ é um filtro próprio se, e somente se, $0 \notin \mathbf{F}$.

Demonstração: (i) Segue da Proposição 1.6.

(ii) ($\Rightarrow$) Se $0 \in \mathbf{F}$, pela condição (ii) da Definição 1.1, como para todo $a \in$ B, tem-se $0 \leq a$, então $a \in \mathbf{F}$ e, assim, B = $\mathbf{F}$. Neste caso, $\mathbf{F}$ não é próprio.

($\Leftarrow$) Como $0 \in$ B e $0 \notin \mathbf{F}$, então $\mathbf{F} \neq$ B. Daí, $\mathbf{F}$ é próprio. ■

Proposição 1.15: Sejam $\mathcal{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole, $\mathbf{F} \subseteq$ B um filtro e b um elemento de B. Então, o filtro $\mathbf{F^*}$ gerado por $\mathbf{F}$ e b é próprio se, e somente se, $\sim b \notin \mathbf{F}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\sim b \in \mathbf{F}$, então $b \wedge \sim b = 0 \in \mathbf{F^*}$. Daí, $\mathbf{F^*}$ não é próprio.

($\Leftarrow$) Se $\mathbf{F^*}$ não é próprio, então, $0 \in \mathbf{F^*}$. Então, existe um elemento $c \in \mathbf{F}$ tal que $b \wedge c \leq 0 \Leftrightarrow (b \wedge c) \wedge 0 = b \wedge c \Leftrightarrow 0 = b \wedge c \Leftrightarrow \sim b \vee 0 = \sim b \vee b \wedge c \Leftrightarrow c = \sim b$. Portanto, o elemento $\sim b \in \mathbf{F}$. ■

Definição 1.16: Sejam $\mathcal{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq$ B um filtro. A relação binária $\equiv_F$ em B é definida por: $a \equiv_{\mathbf{F}} b \Leftrightarrow$ existe $c \in \mathbf{F}$ tal que $a \wedge c = b \wedge c$.

Proposição 1.17: Sejam $\mathcal{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq$ B um filtro. A relação $\equiv_{\mathbf{F}}$ é uma relação de equivalência tal que, se $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$ e $b \equiv_{\mathbf{F}} b'$, então $a \wedge b \equiv_{\mathbf{F}} a' \wedge b'$ e $a \vee b \equiv_{\mathbf{F}} a' \vee b'$. Ademais, $a \in \mathbf{F} \Leftrightarrow a \equiv_{\mathbf{F}} 1$.

Demonstração: Ver (Rodrigues, 2012). ■

Proposição 1.18: Se $\mathcal{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq$ B é um filtro em B, então:
(i) para todos a, $a' \in$ B, $a \equiv_{\mathbf{F}} a' \Rightarrow \sim [(\sim a' \wedge a) \vee (\sim a \wedge a')] \in \mathbf{F}$

(ii) $\equiv_{\mathbf{F}}$ é uma congruência com respeito à operação ~, ou seja, $a \equiv_{\mathbf{F}} a' \Rightarrow \sim a \equiv_{\mathbf{F}} \sim a'$.

Demonstração: (i) Como $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$, então, pela Definição 1.14, existe $b \in \mathbf{F}$ tal que $a \wedge$b $= a' \wedge b$. Desta forma, temos que $\sim a \wedge (a \wedge b) = \sim a \wedge (a' \wedge b) \Rightarrow (\sim a \wedge a) \wedge b = (\sim a \wedge a') \wedge b \Rightarrow 0 \wedge b = (\sim a \wedge a') \wedge b \Rightarrow (\sim a \wedge a') \wedge b = 0 \Rightarrow [(\sim a \wedge a') \wedge b] \vee \sim b = 0 \vee \sim b \Rightarrow [(\sim a \wedge a') \vee \sim b] \wedge (b \vee \sim b) = \sim b \Rightarrow [(\sim a \wedge a') \vee \sim b]$

$\wedge\ 1 = {\sim}b \Rightarrow ({\sim}a{\wedge}a') \vee {\sim}b = {\sim}b \Rightarrow {\sim}[({\sim}a{\wedge}a') \vee {\sim}b] = {\sim}{\sim}b \Rightarrow {\sim}({\sim}a{\wedge}a') \wedge {\sim}{\sim}b = b \Rightarrow {\sim}({\sim}a{\wedge}a') \wedge b = b \Rightarrow b \leq {\sim}({\sim}a{\wedge}a')$. Logo, como $b \in$ **F** e **F** é um filtro, então ${\sim}({\sim}a{\wedge}a') \in$ **F**. Analogamente, podemos mostrar que $b \leq {\sim}({\sim}a'{\wedge}a)$ e, consequentemente, ${\sim}({\sim}a'{\wedge}a) \in$ **F**. Assim, ${\sim}({\sim}a'{\wedge}a) \wedge {\sim}({\sim}a{\wedge}a') = {\sim}[({\sim}a'{\wedge}a) \vee ({\sim}a{\wedge}a')] \in$ **F**, pois **F** é um filtro.

(ii) Se $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$, então, por (i), $b = {\sim}({\sim}a'{\wedge}a) \wedge {\sim}({\sim}a{\wedge}a') \in$ **F**. Assim, ${\sim}a{\wedge}b = {\sim}a \wedge [{\sim}({\sim}a'{\wedge}a) \wedge {\sim}({\sim}a{\wedge}a')] = [{\sim}a \wedge {\sim}({\sim}a'{\wedge}a)] \wedge {\sim}({\sim}a{\wedge}a') = [{\sim}a \wedge ({\sim}{\sim}a'{\vee}{\sim}a)] \wedge ({\sim}{\sim}a{\vee}{\sim}a') = [{\sim}a \wedge (a'{\vee}{\sim}a)] \wedge (a{\vee}{\sim}a') = {\sim}a \wedge (a{\vee}{\sim}a') = ({\sim}a \wedge a) \vee ({\sim}a{\wedge}{\sim}a') = 0 \vee ({\sim}a{\wedge}{\sim}a') = {\sim}a{\wedge}{\sim}a' = {\sim}a'{\wedge}{\sim}a = ({\sim}a'{\wedge}{\sim}a) \vee 0 = ({\sim}a'{\wedge}{\sim}a) \vee ({\sim}a'{\wedge}a') = {\sim}a' \wedge ({\sim}a{\vee}a') = [{\sim}a' \wedge ({\sim}a'{\vee}a)] \wedge {\sim}(a{\wedge}{\sim}a') = {\sim}a' \wedge [({\sim}a'{\vee}a) \wedge {\sim}({\sim}a'{\wedge}a)] = {\sim}a' \wedge [{\sim}(a'{\wedge}{\sim}a) \wedge {\sim}({\sim}a'{\wedge}a)] = {\sim}a' \wedge [{\sim}({\sim}a'{\wedge}a) \wedge {\sim}({\sim}a{\wedge}a')] = {\sim}a' \wedge b$. Logo, ${\sim}a \equiv_{\mathbf{F}} {\sim}a'$. ■

Definição 1.19: Sejam $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq B$ um filtro. A *classe de equivalência* do elemento $a \in \mathbf{F}$ por $\equiv_{\mathbf{F}}$ é $a/_{\mathbf{F}} = \{b \in B: b \equiv_{\mathbf{F}} a\}$.

Proposição 1.20: O conjunto das classes de equivalência da relação $\equiv_{\mathbf{F}}$ dada por $B/_{\mathbf{F}} = \{a/_{\mathbf{F}}: a \in B\}$ determina uma álgebra de Boole quociente, em que: ${\sim}(a/_{\mathbf{F}}) = ({\sim}a)/_{\mathbf{F}}$, $a/_{\mathbf{F}}{\wedge}b/_{\mathbf{F}} = a{\wedge}b/_{\mathbf{F}}$ e $a/_{\mathbf{F}}{\vee}b/_{\mathbf{F}} = a{\vee}b/_{\mathbf{F}}$, $0 = 0/_{\mathbf{F}}$, $1 = 1/_{\mathbf{F}}$, para todos $a, b \in B$.

Definição 1.21: Um *ultrafiltro*, em uma álgebra de Boole $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$, é um filtro **U** tal que, para todo $a \in B$, exatamente um dentre os elementos a e ${\sim}a$ pertence a **U**.

Proposição 1.22: Se $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole, então, as seguintes condições são equivalentes para todo filtro $\mathbf{F} \subseteq B$:

(i) **F** é um ultrafiltro
(ii) **F** é um filtro maximal
(iii) **F** é um filtro primo
(iv) **F** é um filtro irredutível.

Demonstração: Ver Rasiowa e Sikorski (1968, p. 79). ■

Proposição 1.23: Se $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole e $\mathbf{U} \subseteq B$ um ultrafiltro, então $0 \notin \mathbf{U}$ e $1 \in \mathbf{U}$.

Demonstração: Pela Proposição 1.19, como cada ultrafiltro é um filtro próprio, então, $0 \notin \mathbf{U}$. Pela Proposição 1.12 (i), $1 \in \mathbf{U}$.

Proposição 1.24: Seja $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole. Se, para todos a, $b \in B$ temos que não ocorre $b \leq a$, então, existe um ultrafiltro **U** em $\mathcal{B}$ tal que $a \notin \mathbf{U}$ e $b \in \mathbf{U}$. ■

Demonstração: Pode ser encontrada em Rasiowa e Sikorski (1968, p. 49).

Seja $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ o conjunto de todos os ultrafiltros de B. Para todo $a \in B$, sejam $h(a) = \{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathcal{B}) : a \in \mathbf{U}\}$ e $\mathbf{P}(\mathcal{B}) = \{h(a) : a \in B\}$.

Teorema 1.25: Se $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole, então, h é um isomorfismo de álgebras de Boole de $\mathcal{B}$ em $\mathbf{P}(\mathcal{B})$.

Demonstração: Este é o famoso Teorema do Isomorfismo de Stone, que pode ser encontrado em Rasiowa e Sikorski (1968, p. 83). ■

Definição 1.26: O isomorfismo h é um *isomorfismo de Stone*, $\mathbf{U}(\mathbf{B})$ é um *espaço de Stone*.

O Teorema de Stone nos permite afirmar que, para toda álgebra de Boole $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$, existe um homomorfismo injetivo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$, pois $\mathbf{P}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$. Podemos explicar mais detalhadamente: como **U** é um ultrafiltro em $\mathcal{B}$, então, $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{B}$, ou seja, $\mathbf{U} \in \mathcal{P}(B)$. Assim, $h(a) \subseteq \mathcal{P}(B)$, ou ainda, $h(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$ e, então, segue que $\mathbf{P}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$.

Como afirmamos anteriormente, os filtros separam as proposições verdadeiras e um ultrafiltro, o qual é um filtro particular, separa as proposições em apenas dois grupos as verdadeiras, que serão interpretadas como as conhecidas, e as falsas.

2. A interpretação do operador K

O operador K tem a incumbência de indicar, no sistema formal proposto para a lógica epistêmica, quais proposições são conhecidas pelos agentes do sistema. Ele pode ser concebido como um operador modal do conhecimento, dentro de um sistema lógico proposicional e modal.

Para a formulação de tal sistema lógico, consideramos uma linguagem proposicional para descrever o conhecimento de um agente. No nosso caso, também para descrever o conhecimento de uma comunidade que é capaz de decidir sobre toda e qualquer proposição formulada na sua linguagem. A sua linguagem deve incluir uma linguagem booleana usual, com seus respectivos operadores e usuais propriedades, na qual será incluído o operador do conhecimento K.

O operador modal da lógica epistêmica pode ser interpretado como "é conhecido que". Algumas vezes, é usada a expressão $K_a\varphi$, para significar que o indivíduo ou agente *a* sabe ou conhece que vale φ. Nesse âmbito, uma lógica epistêmica pode ser entendida como um exemplo de lógica modal para a representação do conhecimento.

Para mais detalhes sobre lógicas modais e epistêmicas, em particular, sugerimos o livro de Chellas (1980).

Podemos usar as noções do conhecimento individualizado ou do conhecimento coletivo, que será o caso deste ensaio. Introduzimos uma visão particular de lógica epistêmica para um mundo muito particular e determinista, conforme indicamos a seguir.

Por serem casos de lógicas modais, os modelos usuais de lógicas epistêmicas são dados por semânticas de Kripke, formuladas em termos de mundos possíveis. No nosso caso, teremos um modelo algébrico com motivação no conceito de ultrafiltro.

No nosso mundo usual, cada indivíduo, ou grupo de indivíduos, sabe que algumas leis são válidas como "todo humano é mortal" (no sentido usual dos termos) e algumas não valem, como "uma porção de água pode pegar fogo" e, para uma quantidade infinita de outras, não temos uma resposta definitiva, como "há seres vivos e inteligentes em outros astros que não a Terra".

Como procuramos formalizar uma comunidade de caráter determinista, isto é, que sempre pode determinar quais são as proposições verdadeiras ou válidas e as que não o são, um agente dessa comunidade partilha os seguintes princípios:

(i) cada agente sabe que todas as tautologias são válidas;

(ii) cada agente sabe que vale $\varphi\wedge\psi$ se, e somente, ele sabe que vale φ e sabe que vale ψ;

(iii) se há uma demonstração de $\varphi \to \psi$ e o agente sabe que vale φ, então, ele sabe que vale ψ.

Esses princípios não são muito exigentes. Uma comunidade usual pode partilhá-los sem maiores problemas. O princípio mais forte e que caracteriza o aspecto determinístico da comunidade é o seguinte:

(iv) cada agente sabe que ou vale φ ou vale $\neg\varphi$.

O agente não tem apenas o conhecimento de que um dos dois deve valer, mas ele já sabe qual vale dentre os dois.

Com essa interpretação motivada pelo conceito de ultrafiltro, podemos agora introduzir a lógica que dará conta de inter-relacionar as nossas motivações, em contexto lógico e semântica algébrica adequadas.

3. Lógica dos ultrafiltros como uma lógica epistêmica determinística

Apresentamos uma lógica epistêmica determinística, doravante LED, para o conceito "é conhecido que" ou "é sabido que" e interpretada nos ultrafiltros.

Como LED é uma extensão da lógica proposicional clássica, todos os resultados da lógica proposicional clássica, ou cálculo proposicional clássico (CPC), são também resultados válidos em LED. Além desses resultados, teremos outros, dados pelo novo operador lógico K, o qual captura a noção de "é conhecido que", conforme apresentamos a seguir.

Indicamos o conjunto de variáveis proposicionais e o conjunto de fórmulas de LED, respectivamente, por Var(LED) e For(LED).

LED é gerada sobre a linguagem $L(\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, K)$, em que $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$ são os conectivos lógicos usuais e K é um novo operador epistêmico.

O conjunto de fórmulas For(LED) é dado pelas fórmulas do CPC, acrescidas das fórmulas obtidas pela cláusula: se φ é uma fórmula, então, $K\varphi$ é uma fórmula.

O operador $\veebar$ é a *disjunção exclusiva*, dado por $\varphi \veebar \psi =_{def} (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$.

Axiomas:
(Ax_0) Axiomas do cálculo proposicional clássico (CPC)
(Ax_1) $K\top$, em que $\top$ indica uma tautologia
(Ax_2) $(K\varphi \wedge K\psi) \rightarrow K(\varphi \wedge \psi)$
(Ax_3) $K\varphi \veebar K\neg\varphi$.

Regras de dedução:
(MP) $\varphi \to \psi, \varphi / \psi$
(R_K) $\vdash \varphi \to \psi / \vdash K\varphi \to K\psi$.

Os axiomas (Ax_1) e (Ax_2) valem nas lógicas modais normais e, desse modo, também valem para os sistemas usuais de lógica epistêmica. Naturalmente, os resultados obtidos a partir desses dois axiomas também são ali válidos. Específicos dessa versão determinista são o axioma (Ax_3) e as suas consequências.

Os conceitos de dedução e demonstração são os usuais dos sistemas axiomáticos ou de Hilbert (FEITOSA; PAULOVICH, 2005). Como, usualmente, denotamos que a fórmula γ é deduzida a partir do conjunto Γ por $\Gamma \vdash \gamma$, se Γ é vazio, a expressão '$\vdash \gamma$' denota que a fórmula γ é um teorema de LED. Além disso, nossos axiomas e regras de dedução são esquemas, ou seja, φ e ψ representam fórmulas quaisquer da linguagem de LED.

Os novos axiomas e a regra de dedução de LED dão conta de algumas das características dos ultrafiltros.

Proposição 3.1: $\vdash \neg K\varphi \to K\neg\varphi$.

Demonstração: Do (Ax_3) temos $\vdash K\varphi \veebar K\neg\varphi \Leftrightarrow \vdash (K\varphi \vee K\neg\varphi) \wedge \neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi) \Rightarrow \vdash K\varphi \vee K\neg\varphi \Leftrightarrow \vdash \neg\neg K\varphi \vee K\neg\varphi \Leftrightarrow \vdash \neg K\varphi \to K\neg\varphi$. ■

Proposição 3.2: $\vdash K\neg\varphi \to \neg K\varphi$.

Demonstração: Do (Ax_3) temos $\vdash K\varphi \veebar K\neg\varphi \Leftrightarrow \vdash (K\varphi \vee K\neg\varphi) \wedge \neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi) \Rightarrow \vdash \neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi) \Leftrightarrow \vdash \neg K\varphi \vee \neg K\neg\varphi \Leftrightarrow \vdash K\neg\varphi \to \neg K\varphi$. ■

Corolário 3.3: $\vdash K\neg\varphi \leftrightarrow \neg K\varphi$.

Demonstração: Segue das duas proposições anteriores. ■

Esses resultados indicam que os agentes dessa comunidade sabem exatamente se vale ou não uma proposição φ. Se φ vale, então $\neg\varphi$ não vale e vice-versa.

Proposição 3.4: $\vdash \neg K\bot$.

Demonstração: Do resultado anterior, temos $\vdash K\neg\bot \leftrightarrow \neg K\bot$. Do ($Ax_1$) temos $\vdash K\neg\bot$ e, por (MP), $\vdash \neg K\bot$. ■

Naturalmente, as contradições não valem.

Proposição 3.5: $\vdash K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow K\varphi$.

Demonstração: Basta observar que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ e aplicar a regra (R_K). ■

Corolário 3.6: $\vdash K(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow K\varphi \wedge K\psi$.

Demonstração: Proposição anterior e (Ax_2). ■

Um agente sabe que vale $\varphi \wedge \psi$ quando, e somente quando, sabe que vale cada uma isoladamente.

Proposição 3.7: $\vdash K\varphi \rightarrow K(\varphi \vee \psi)$.

Demonstração: Basta observar que $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ e aplicar a regra (R_K). ■

Corolário 3.8: $\vdash K\varphi \vee K\psi \rightarrow K(\varphi \vee \psi)$.

Demonstração: Segue da proposição anterior. ■

Proposição 3.9: $\vdash \varphi \Rightarrow\ \vdash K\varphi$.

Demonstração: $\vdash \varphi \Rightarrow\ \vdash \top \rightarrow \varphi \Rightarrow\ \vdash K\top \rightarrow K\varphi$. Como vale $\vdash K\top$, por (MP), $\vdash K\varphi$. ■

Se uma proposição é um teorema, então, o agente sabe que ela vale.

Agora, introduziremos uma estrutura algébrica para formalizar, no ambiente de uma álgebra de Boole, o conceito de ultrafiltro.

Definição 3.10: Álgebra de ultrafiltro é uma 7-upla $\mathcal{U} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1, \mathbb{K})$, em que $(B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole, $0 \neq 1$ e $\mathbb{K}$ é o operador do ultrafiltro sobre $\mathcal{U}$, o qual satisfaz as seguintes condições para todos $a, b \in B$:

(U_1) $\mathbb{K}1 = 1$
(U_2) $\mathbb{K}a \wedge \mathbb{K}b \leq \mathbb{K}(a \wedge b)$
(U_3) $\mathbb{K}a \leq \mathbb{K}(a \vee b)$
(U_4) $\mathbb{K}a \veebar \mathbb{K}(\sim a) = 1$.

O operador binário $\veebar$ é a disjunção booleana exclusiva dada por:

$$x \veebar y =_{df} (x \vee y) \wedge \sim (x \wedge y).$$

As proposições seguintes mostram que resultados do ambiente lógico têm sempre um correspondente no ambiente algébrico.

Fica a indagação se há correspondências totais para proposições lógicas e expressões algébricas. Resultados posteriores confirmarão que sim.

Proposição 3.11: $a \leq b \Rightarrow \mathbb{K}a \leq \mathbb{K}b$.

Demonstração: Se $a \leq b$, então $a \vee b = b$ e, daí, $\mathbb{K}(a \vee b) = \mathbb{K}b$. Por (U_3), $\mathbb{K}a \leq \mathbb{K}(a \vee b) = \mathbb{K}b$ e, portanto, $\mathbb{K}a \leq \mathbb{K}b$. ■

Proposição 3.12: $\mathbb{K}0 = 0$.

Demonstração: De (U_4), $\mathbb{K}a \veebar \mathbb{K}(\sim a) = 1 \Leftrightarrow (\mathbb{K}a \vee \mathbb{K}(\sim a)) \wedge \sim(\mathbb{K}a \wedge \mathbb{K}(\sim a)) = 1$. Considerando $a = 0$, temos $(\mathbb{K}0 \vee \mathbb{K}1) \wedge \sim(\mathbb{K}0 \wedge \mathbb{K}1) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{K}1 \wedge \sim\mathbb{K}0 = 1 \Leftrightarrow \sim\mathbb{K}0 = 1 \Leftrightarrow \mathbb{K}0 = 0$. ■

Proposição 3.13: $\sim\mathbb{K}\sim a \vee \sim\mathbb{K}a = 1$.

Demonstração: De (U_2), $\mathbb{K}\sim a \wedge \mathbb{K}a \leq \mathbb{K}(\sim a \wedge a) = \mathbb{K}0 = 0 \Rightarrow \mathbb{K}\sim a \wedge \mathbb{K}a = 0 \Rightarrow \sim(\mathbb{K}\sim a \wedge \mathbb{K}a) = \sim 0 \Rightarrow \sim\mathbb{K}\sim a \vee \sim\mathbb{K}a = 1$. ■

Proposição 3.14: $\mathbb{K}\sim a = \sim\mathbb{K}a$.

Demonstração: Como $\mathbb{K}a \vee \mathbb{K}\sim a = 1 \Rightarrow \sim\mathbb{K}a \wedge (\mathbb{K}a \vee \mathbb{K}\sim a) = \sim\mathbb{K}a \wedge 1 \Rightarrow (\sim\mathbb{K}a \wedge \mathbb{K}a) \vee (\sim\mathbb{K}a \wedge \mathbb{K}\sim a) = \sim\mathbb{K}a \Rightarrow 0 \vee (\sim\mathbb{K}a \wedge \mathbb{K}\sim a) = \sim\mathbb{K}a \Rightarrow \sim\mathbb{K}a \wedge \mathbb{K}\sim a = \sim\mathbb{K}a \Rightarrow \sim\mathbb{K}a \leq \mathbb{K}\sim a$.

Por outro lado, da proposição anterior, $\sim\mathbb{K}\sim a \vee \sim\mathbb{K}a = 1 \Rightarrow \mathbb{K}\sim a \wedge (\sim\mathbb{K}\sim a \vee \sim\mathbb{K}a) = \mathbb{K}\sim a \wedge 1 \Rightarrow (\mathbb{K}\sim a \wedge \sim\mathbb{K}\sim a) \vee (\mathbb{K}\sim a \wedge \sim\mathbb{K}a) = \mathbb{K}\sim a \Rightarrow 0 \vee (\mathbb{K}\sim a \wedge \sim\mathbb{K}a) = \mathbb{K}\sim a \Rightarrow \mathbb{K}\sim a \wedge \sim\mathbb{K}a = \mathbb{K}\sim a \Rightarrow \mathbb{K}\sim a \leq \sim\mathbb{K}a$.

Logo, vale a igualdade. ■

Proposição 3.15: $\mathbb{K}(a \wedge b) \leq \mathbb{K}a$.

Demonstração: Como $a \wedge b \leq a$, pela Proposição 3.11, $\mathbb{K}(a \wedge b) \leq \mathbb{K}a$. ■

Corolário 3.16: $\mathbb{K}(a \wedge b) = \mathbb{K}a \wedge \mathbb{K}b$.

Demonstração: Segue da proposição anterior. ■

Proposição 3.17: $\mathbb{K}(a \vee b) = \mathbb{K}a \vee \mathbb{K}b$.

Demonstração: Pela Proposição 3.14, $\sim(\mathbb{K}(a \vee b)) = \mathbb{K}\sim(a \vee b) = \mathbb{K}(\sim a \wedge \sim b) = \mathbb{K}\sim a \wedge \mathbb{K}\sim b = \sim\mathbb{K}a \wedge \sim\mathbb{K}b = \sim(\mathbb{K}a \vee \mathbb{K}b)$. Logo, $\mathbb{K}(a \vee b) = \mathbb{K}a \vee \mathbb{K}b$. ■

Até aqui, temos correspondência fina entre aspectos lógicos da seção anterior e os algébricos desta. A adequação, da próxima seção, nos mostrará que essa correspondência é total e, portanto, poderemos tratar dos conceitos de LED em qualquer das duas formalizações.

4. Sobre a adequação de LED segundo as álgebras dos ultrafiltros

Na sequência, serão explicitados aspectos da demonstração da adequação entre LED e as álgebras de ultrafiltro.

Denotaremos uma álgebra de ultrafiltro genérica por $\mathcal{A}$.

Definição 4.1: Uma *valoração restrita* é uma função $\upsilon^\wedge$: Var(LED) $\rightarrow \mathcal{A}$, que interpreta cada variável de LED em um elemento de $\mathcal{A}$.

Definição 4.2: Para uma fórmula atômica p, e φ e ψ fórmulas quaisquer de LED, uma *valoração* é uma função υ: For(LED) $\rightarrow \mathcal{A}$ que estende de modo natural e único a valoração restrita do seguinte modo:

$$\upsilon(p) = \upsilon^\wedge(p)$$
$$\upsilon(\neg\varphi) = \sim \upsilon(\varphi)$$
$$\upsilon(\varphi \vee \psi) = \upsilon(\varphi) \vee \upsilon(\psi)$$
$$\upsilon(\varphi \wedge \psi) = \upsilon(\varphi) \wedge \upsilon(\psi)$$
$$\upsilon(K\varphi) = \mathbb{K}\upsilon(\varphi).$$

Para as equações ou igualdades da definição acima, os símbolos de operadores do lado esquerdo representam operadores lógicos, enquanto os símbolos de operadores do lado direito representam os operadores algébricos. O símbolo booleano $\rightarrow$ é definido da maneira usual: $\varphi \rightarrow \psi =_{df} \neg\varphi\vee\psi$.

Definição 4.3: Uma valoração υ: For(LED) $\rightarrow \mathcal{A}$ é um *modelo* para um conjunto $\Gamma \subseteq$ For(LED) se $\upsilon(\varphi) = 1$, para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$.

Definição 4.4: Dada uma álgebra de ultrafiltro $\mathcal{A}$, a fórmula φ é *válida* em $\mathcal{A}$ se toda valoração υ: For(LED) $\rightarrow \mathcal{A}$ é um modelo para φ.

Definição 4.5: Uma fórmula φ é *válida* quando ela é válida em toda álgebra de ultrafiltro.

Denotamos que φ é válida por '$\vDash \varphi$'.

Definição 4.6: A álgebra das fórmulas de LED é a estrutura algébrica (For (LED), $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, K), em que $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ e K são os operadores lógicos de LED.

A seguir, obteremos a álgebra de Lindenbaum de LED.

Definição 4.7: Dado $\Gamma \subseteq$ For(LED), definimos a relação $\equiv_\Gamma$:

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

A partir daqui, omitiremos o índice Γ da relação, exceto em alguma situação especial.

Proposição 4.8: A relação $\equiv$ é uma congruência.

Demonstração: Congruência é uma relação de equivalência que preserva os operadores envolvidos. Primeiramente, verificamos que $\equiv$ é uma relação de equivalência.

A relação é reflexiva: para toda fórmula $\varphi \in \Gamma \subseteq$ For(LED), $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ e, então, $\varphi \equiv \varphi$.

A relação é simétrica: se $\varphi \equiv \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Logo, $\psi \equiv \varphi$.

A relação é transitiva: se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \sigma$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \psi$. Logo, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \varphi \equiv \sigma$.

Assim, a relação $\equiv$ é de equivalência.

Para concluirmos a demonstração de que a relação $\equiv$ é uma congruência, basta mostrarmos que ela preserva o operador K, pois, claramente, preserva os operadores booleanos.

Se $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Pela regra ($R_K$), temos que $\Gamma \vdash K\varphi \leftrightarrow K\psi \Leftrightarrow K\varphi \equiv K\psi$.

Logo, a relação $\equiv$ é uma congruência. ■

Definição 4.9: A *classe de equivalência de* φ módulo $\equiv$ e Γ é dada por:

$$[\varphi]_\Gamma = \{\psi \in \text{For(LED)}: \psi \equiv_\Gamma \varphi\}.$$

Definição 4.10: Dado $\Gamma \subseteq$ For(LED), a álgebra de Lindenbaum de LED relativa a Γ, que será denotada por $\mathcal{A}_\Gamma$(LED), é a álgebra quociente:

$\mathcal{A}_\Gamma(\text{LED}) = (\text{For(LED)}\,|_\equiv, \wedge_\equiv, \vee_\equiv, \neg_\equiv, K_\equiv, 0_\equiv, 1_\equiv)$, tal que:
$[\varphi] \wedge_\equiv [\psi] = [\varphi\wedge\psi]$
$[\varphi] \vee_\equiv [\psi] = [\varphi\vee\psi]$
$\neg_\equiv [\varphi] = [\neg\varphi]$
$K_\equiv [\varphi] = [K\varphi]$
$0_\equiv = [\varphi\wedge\neg\varphi] = [\bot]$
$1_\equiv = [\varphi\vee\neg\varphi] = [\top]$.

Não escreveremos mais o subíndice ≡ da álgebra acima.

Quando $\Gamma = \varnothing$, denotamos a álgebra de Lindenbaum de LED relativa a Γ por $\mathcal{A}$(LED), a qual chamamos simplesmente de álgebra de Lindenbaum de LED.

Proposição 4.11: Na álgebra $\mathcal{A}_\Gamma$(LED), temos que: $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Demonstração: $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi\wedge\psi] = [\varphi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\wedge\psi \leftrightarrow \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi$. ■

Proposição 4.12: A álgebra $\mathcal{A}_\Gamma$(LED) é uma álgebra de ultrafiltro.

Demonstração: (i) Pelo (Ax_1), $\vdash K\top \leftrightarrow \top \Rightarrow [K\top] = [\top] \Rightarrow K[\top] = [\top] \Rightarrow K1 = 1$.

(ii) Pelo (Ax_2), $\vdash (K\varphi \wedge K\psi) \to K(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow [K\varphi \wedge K\psi] \leq [K(\varphi \wedge \psi)] \Rightarrow [K\varphi] \wedge [K\psi] \leq K[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow K[\varphi] \wedge K[\psi] \leq K[\varphi \wedge \psi]$.

(iii) Pelo (Ax_3), $\vdash K\varphi \veebar K\neg\varphi \Rightarrow \vdash (K\varphi \vee K\neg\varphi) \wedge \neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi) \leftrightarrow \top \Rightarrow [(K\varphi \vee K\neg\varphi) \wedge \neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi)] = [\top] \Rightarrow (K[\varphi] \vee K[\neg\varphi]) \wedge \neg(K[\varphi] \wedge K[\neg\varphi]) = 1 \Rightarrow K[\varphi] \veebar K[\neg\varphi] = 1$.

(iv) A Proposição 3.7 nos garante que: $\vdash K\varphi \to K(\varphi\vee\psi) \Rightarrow [K\varphi] \leq [K(\varphi\vee\psi)] \Rightarrow K[\varphi] \leq K[\varphi\vee\psi]$.

Assim, a álgebra $\mathcal{A}_\Gamma$(LED) é uma álgebra de ultrafiltro. ■

Definição 4.13: A valoração υ: For(LED) $\to \mathcal{A}_\Gamma$(LED) é o *modelo canônico* de $\Gamma \subseteq$ For(LED).

Proposição 4.14: Seja $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq$ For(LED):

(i) $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $[\varphi] = 1$ em $\mathcal{A}_\Gamma$(LED);

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi$ (φ é refutável em Γ) se, e somente se, $[\varphi] = 0$ em $\mathcal{A}_\Gamma$(LED).

Demonstração:

(i) ($\Leftarrow$) Se $[\varphi] = 1$, então $[\varphi \to \varphi] \leq [\varphi]$, pela Proposição 4.11, $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$. Como $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$, então, pela regra MP, temos $\Gamma \vdash \varphi$.

($\Rightarrow$) Se $\Gamma \vdash \varphi$, então, como $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ é um resultado do CPC, pela regra MP, $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$. A álgebra A_Γ(LED) sempre tem o elemento 1. Logo, $1 = [\neg\varphi \vee \varphi] = [\varphi \to \varphi] \leq [\varphi]$ e, portanto, $[\varphi] = 1$.

(ii) Pelo item anterior, temos: $\Gamma \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow [\neg\varphi] = 1 \Leftrightarrow \neg[\varphi] = 1 \Leftrightarrow [\varphi] = 0$. ■

O Teorema da Correção, a seguir, demonstra que, se uma fórmula é um teorema de LED, então, ela é válida em $\mathcal{U}$.

Teorema 4.15: (Correção) As álgebras de ultrafiltro são modelos corretos para LED.

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = (B, \sim, \wedge, \vee, 0, 1, \mathbb{K})$ uma álgebra de ultrafiltro. Resta-nos verificar que os axiomas (Ax_1), (Ax_2) e (Ax_3) são válidos e a regra (R_K) preserva a validade.

(Ax_1) $\upsilon(K\top) = \mathbb{K}\upsilon(\top) = \mathbb{K}1 = 1$.

(Ax_2) $\upsilon((K\varphi \wedge K\psi) \to K(\varphi \wedge \psi)) = \upsilon(\neg(K\varphi \wedge K\psi)) \vee (K(\varphi\wedge\psi)) = \upsilon(\neg(K\varphi \wedge K\psi)) \vee \upsilon(K(\varphi\wedge\psi)) = \upsilon(\neg K\varphi \vee \neg K\psi) \vee \upsilon(K(\varphi\wedge\psi)) = (\upsilon(\neg K\varphi) \vee \upsilon(\neg K\psi)) \vee \upsilon(K(\varphi\wedge\psi)) = (\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee \sim\mathbb{K}\upsilon(\psi)) \vee \mathbb{K}\upsilon(\varphi\wedge\psi) = (\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee \sim\mathbb{K}\upsilon(\psi)) \vee \mathbb{K}(\upsilon(\varphi) \wedge \upsilon(\psi))$ = (Pela Corolário 3.16) $(\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee \sim\mathbb{K}\upsilon(\psi)) \vee (\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \wedge \mathbb{K}\upsilon(\psi)) = ((\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee \sim \mathbb{K}\upsilon(\psi)) \vee \mathbb{K}\upsilon(\varphi)) \wedge ((\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee \sim\mathbb{K}\upsilon(\psi)) \vee \mathbb{K}\upsilon(\psi)) = ((\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee \mathbb{K}\upsilon(\varphi)) \vee \sim\mathbb{K}\upsilon(\psi)) \wedge (\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee (\sim\mathbb{K}\upsilon(\psi) \vee \mathbb{K}\upsilon(\psi))) = (1 \vee \sim\mathbb{K}\upsilon(\psi)) \wedge (\sim\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$.

(Ax_3) $\upsilon(K\varphi \veebar K\neg\varphi) = \upsilon((K\varphi \vee K\neg\varphi) \wedge \neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi)) = (\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \vee \mathbb{K}\sim\upsilon(\varphi)) \wedge \sim(\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \wedge \mathbb{K}\sim\upsilon(\varphi))$ = (Pelas Proposições 3.16 e 3.17) $1 \wedge \sim 0 = 1 \wedge 1 = 1$.

(R_K) $\upsilon(\varphi \to \psi) = 1 \Rightarrow \upsilon(\varphi) \leq \upsilon(\psi) \Rightarrow$ (Pela Proposição 3.11) $\mathbb{K}\upsilon(\varphi) \leq \mathbb{K}\upsilon(\psi) \Rightarrow \upsilon(\mathbb{K}\varphi) \leq \upsilon(\mathbb{K}\psi) \Rightarrow \upsilon(\mathbb{K}\varphi \to \mathbb{K}\psi) = 1$. ■

Denotaremos por $\Gamma \vDash \varphi$ que todo modelo de Γ é também modelo de φ.

Lema 4.16: Seja $\Gamma \subseteq$ For(LED) e $\mathcal{U}$ uma álgebra de ultrafiltro. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então, $\Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração: Seja υ_B: For(LED) $\rightarrow \mathcal{U}$ um modelo para Γ. Como $\Gamma \vdash \varphi$, então, φ tem que ser um axioma de LED, ou uma fórmula obtida por meio de regras de dedução de LED, ou uma fórmula de Γ. Pelo Teorema da Correção, os axiomas de LED são válidos e as regras de LED preservam a validade. Resta o caso em que $\varphi \in \Gamma$. Como $\upsilon_{\mathcal{B}}(\psi) = 1$, para toda fórmula $\psi \in \Gamma$, então, $\upsilon_{\mathcal{B}}(\varphi) = 1$. Logo, $\upsilon_{\mathcal{B}}$ é um modelo para φ. ■

Proposição 4.17: Seja $\Gamma \subseteq$ For(LED) e $\mathcal{U}$ uma álgebra de ultrafiltro. Se existe um modelo $\upsilon_{\mathcal{U}}$: For(LED) $\rightarrow \mathcal{U}$ para Γ, então, Γ é consistente.

Demonstração: Suponhamos que Γ não é consistente. Então, existe φ, tal que: $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Além disso, $\upsilon_{\mathcal{U}}(\varphi) = 1$ e $\upsilon_{\mathcal{U}}(\neg\varphi) = 1 \Rightarrow {\sim}\upsilon_{\mathcal{U}}(\varphi) = 1 \Rightarrow \upsilon_{\mathcal{U}}(\varphi) = 0$, donde temos uma contradição. Portanto, Γ é consistente. ■

Definição 4.18: Um modelo υ: For(LED) $\rightarrow \mathcal{U}$ é *fortemente adequado* para Γ quando:

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e somente se, } \Gamma \vDash_{\mathcal{U}} \varphi.$$

Modelos fortemente adequados permitem transição completa entre a dedução axiomática de LED e a consequência semântica relativa a $\mathcal{U}$.

Lema 4.19: Se $\Gamma \subseteq$ For(LED) é consistente, por conseguinte, a valoração canônica é um modelo fortemente adequado para Γ.

Demonstração: Considerando a valoração canônica υ_0: For(LED) $\rightarrow \mathcal{A}_\Gamma$(LED), em que $\upsilon_0(\varphi) = [\varphi]$, então $\upsilon_0(\varphi) = 1$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$. Consequentemente, a valoração canônica υ_0 é um modelo adequado para Γ. ■

Lema 4.20: As seguintes condições são equivalentes para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq$ For(LED):

(i) Γ é consistente;
(ii) existe um modelo fortemente adequado para Γ;
(iii) existe um modelo fortemente adequado para Γ, em uma álgebra de ultrafiltro $\mathcal{U}$, a qual é uma álgebra de conjuntos $\mathcal{U} = (B, \cap, \cup, {}^C, \varnothing, \mathbb{K})$;
(iv) existe um modelo para Γ.

Demonstração:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue pelo Lema 4.19.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Como, pela Proposição 4.12, $\mathcal{A}_\Gamma$(LED) é uma álgebra de ultrafiltro e, pela extensão do Teorema 1.24 (Teorema do Isomorfismo de Stone), toda álgebra de ultrafiltro é isomorfa a uma álgebra de conjuntos $\mathcal{U} = (B, \cap, \cup, {}^C, \varnothing, \mathbb{K})$, então, o resultado é imediato.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) O resultado é imediato.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Segue pela Proposição 4.17. ■

Teorema 4.21: (Adequação forte) Seja $\Gamma \subseteq$ For(LED). Se Γ é consistente, as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $\Gamma \vdash \varphi$;
(ii) $\Gamma \vDash \varphi$;
(iii) todo modelo de Γ na álgebra de ultrafiltro de conjuntos $\mathcal{U} = (B, \cap, \cup, {}^C, \varnothing, \mathbb{K})$ é um modelo para φ.
(iv) $\upsilon_0(\varphi) = 1$, para toda valoração canônica υ_0 no modelo canônico $\mathcal{A}_\Gamma$(LED).

Demonstração:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Lema 4.16.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se $\Gamma \vDash \varphi$, então, todo modelo para Γ também é modelo para φ, em particular, todo modelo de Γ na álgebra de ultrafiltro de conjuntos $\mathcal{U} = (B, \cap, \cup, {}^C, \varnothing, \mathbb{K})$ é um modelo para φ.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Por hipótese, Γ é consistente. Logo, pelo Lema 4.20, existe um modelo fortemente adequado para Γ, em uma álgebra de ultrafiltro $\mathcal{U}$, que é uma álgebra de conjuntos $\mathcal{U} = (B, \cap, \cup, {}^C, \varnothing, \mathbb{K})$. Como $\mathcal{A}_\Gamma$(LED) é uma álgebra de ultrafiltro (Proposição 4.12) e toda álgebra de ultrafiltro é isomorfa a uma álgebra de ultrafiltro de conjuntos $\mathcal{U} = (B, \cap, \cup, {}^C, \varnothing, \mathbb{K})$, então, para a valoração canônica υ_0 no modelo canônico $\mathcal{A}_\Gamma$(LED), segue que $\upsilon_0(\varphi) = 1$.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Como, por hipótese, Γ é consistente, do Lema 4.19 temos que a valoração canônica υ_0 : For(LED) $\rightarrow \mathcal{A}_\Gamma$(LED) é um modelo fortemente adequado para Γ, ou seja, $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}\Gamma(\mathrm{LED})} \varphi$. Pelo item (iv) desse teorema, $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}\Gamma(\mathrm{LED})} \varphi$. Logo, $\Gamma \vdash \varphi$.

Assim, fica demonstrado que as álgebras de ultrafiltros são modelos fortemente adequados para LED. Temos uma visão de LED em uma estrutura algébrica bastante conhecida e uma total interação entre as duas formalizações para a noção determinística que temos abordado.

Resulta que temos uma realização matemática e algébrica para a lógica LED.

Considerações finais

Lógicas modais epistêmicas foram conhecidas e investigadas ao longo do século passado. Os conceitos de filtro e ultrafiltro também são bastante conhecidos por algebristas e lógicos.

A nossa contribuição aqui é de fazer uma interpretação do operador modal K num ultrafiltro qualquer e vincular essa interpretação a um conceito de determinismo, o que está impregnado nas estruturas quocientes por ultrafiltros, pois, nesse caso, a estrutura quociente admite apenas duas classes de equivalência, as quais podem estar associadas aos valores 0 ou 1, designando, respectivamente, para nós, não conhecimento ou conhecimento.

O axioma (Ax_3), $K\varphi \veebar K\neg\varphi$, de LED, pode ser interpretado numa comunidade como: “cada agente sabe que vale exclusivamente φ ou sabe que vale exclusivamente $\neg\varphi$”. Ou seja, não existe a possiblidade da indeterminação para os agentes que atuam num contexto governado pela lógica LED.

Não defendemos que haja uma sociedade determinista, mas apenas que o conceito de ultrafiltro nos fornece um ambiente completamente bivalente, em que a noção de determinismo poderia sobreviver.

Referências

CARNIELLI, W.; GRÁCIO, M. C. C. Modulated logics and flexible reasoning. *Logic and logical philosophy*, v. 17, n. 3, p. 211-249, 2008.

CHELLAS, B. F. *Modal logic*: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. Lógica TK: algebraic notions from Tarski's consequence operator. *Principia*, v. 14, n. 1, p. 47-70, 2010. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~principi/>. Acesso em: 10 fev. 2011.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2005.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP, 2002. (Título original: *Philosophy of logics*).

MENDELSON, E. Álgebra booleana e circuitos de chaveamento. Tradução de C. M. Paciornick. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1977.

MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional:* uma interação da álgebra e da lógica. Campinas: UNICAMP/CLE, 1987 (Coleção CLE, v. 1).

RASIOWA, H. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland, 1974.

RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. *The mathematics of metamathematics*. 2. ed. Warszawa: PWN – Polish Scientific, 1968.

RODRIGUES, A. P. *Sobre quantificadores*: uma formalização do quantificador "quase sempre". 2012. Dissertação (Mestrado em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2012.

RODRIGUES, A. P.; FEITOSA, H. A. A lógica proposicional do "quase sempre". *Cognitio-Estudos*, v. 9, n. 2, p. 227-242, 2012. Disponível em: <http://www.pucsp. br/pragmatismo>. Acesso em: 07 jan. 2016.

SETTE, A. M., CARNIELLI, W. A., VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H., PEREIRA, L. C. (Ed.). *Pratica:* Proofs, types and categories. Rio de Janeiro: PUC, 1999. p. 127-158.