Visões Conflitantes sobre a Matemática:
possível conciliação à luz da pesquisa empírica

Paulo Estevão Andrade; Paulo Sérgio Teixeira do Prado

Como citar: ANDRADE, Paulo Estevão; PRADO, Paulo Sérgio Teixeira do. Visões Conflitantes sobre a Matemática: possível conciliação à luz da pesquisa empírica. *In*: PRADO, Paulo Sérgio Teixeira; CARMO, João dos Santos (org.). **Diálogos sobre ensino-aprendizagem da matemática**: abordagens pedagógica e neuropsicológica. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2016. p. 99-170.
DOI: https://doi.org/10.36311/2016.978-85-7983-760-9.p99-170

All the contents of this work, except where otherwise noted, is licensed under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-ShareAlike 3.0 Unported.

Todo o conteúdo deste trabalho, exceto quando houver ressalva, é publicado sob a licença Creative Commons Atribuição - Uso Não Comercial - Partilha nos Mesmos Termos 3.0 Não adaptada.

Todo el contenido de esta obra, excepto donde se indique lo contrario, está bajo licencia de la licencia Creative Commons Reconocimento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported.

Capítulo 4

Visões Conflitantes sobre a Matemática: Possível Conciliação à Luz da Pesquisa Empírica

Paulo Estevão Andrade

Paulo Sérgio Teixeira do Prado

> *O conhecimento das coisas matemáticas é quase inato em nós… Esta é a mais fácil das ciências, um fato óbvio em que nenhum cérebro o rejeita; pois leigos e pessoas totalmente iletradas sabem como contar e calcular.*Roger Bacon (1219–1294)

> *A matemática pode ser definida como o assunto no qual nunca sabemos do que estamos falando, nem se o que estamos dizendo é verdade.*Bertrand Russell (1872–1970)

Introdução

Ao citar os dois autores na epígrafe acima, Feigenson, Dehaene e Spelke (2004) se perguntam como é possível ver a matemática sob perspectivas tão distintas e conflitantes, as quais, porém, retratam uma realidade que todos conhecemos: a demonstração tão precoce e espontânea de habilidades numéricas pelas crianças, juntamente com o fato de a maioria dos escolares e adultos achar a matemática extremamente difícil.

Há algum tempo se estuda como as crianças desenvolvem os conceitos, a linguagem, aprendem aritmética e os processos de desenvolvimento do pensamento. Os primeiros meses de vida dos bebês é uma época fascinante. Por volta dos seis meses eles começam a manipular mais firmemente os objetos e a brincar com eles. E entre 10 e 12 meses dão demonstrações de que já entendem algumas palavras. Então nosso encantamento pelas suas habilidades sociais, memória e inteligência tornam-se ainda maiores. É comum observarmos orgulhosos como são "vivos" e espertos. Mas como eles aprendem tão rapidamente todas essas habilidades? É inegável que o processo envolve grande dose de aprendizado. Mas, seria esse fator exclusivo, ou as crianças já nascem com alguns circuitos cerebrais especiais e uma motivação também especial? Estaríamos alguns de nós superestimando suas capacidades, ou os bebês já são capazes de pensar mesmo antes de terem aprendido a falar? São eles realmente seres inteligentes como imaginamos? E qual o papel da linguagem no desenvolvimento da inteligência humana? Isto é, a linguagem é uma ferramenta do pensamento ou é ela própria a origem e a base do pensamento? A busca por respostas a essas questões é fundamental para compreendermos claramente como se desenvolve o conceito de número, o que é o comportamento numérico e, enfim, a matemática. Ela tem se dado sobre diferentes bases epistemológicas, gerando resultados distintos, razão pela qual optamos por expor umas e outros e suas relações, de modo a fornecer o contexto de ideias atuais sobre o conhecimento matemático.

Logicismo, intuicionismo e formalismo

Grosso modo, há duas correntes epistemológicas subjacentes à ciência de um modo geral e, de modo mais específico, à psicologia, por um lado e, por outro, à matemática. Por séculos os estudiosos têm debatido sobre se o conhecimento é inato ou adquirido. O empirismo, escola filosófica iniciada pelo inglês John Locke (1632-1704), propõe que todo o conhecimento humano é adquirido por meio da experiência. A mente humana é uma espécie de *tábula rasa*, uma folha em branco sobre a qual as experiências vão sendo impressas pouco a pouco, formando o conhecimento. Uma alternativa ao empirismo é o inatismo (ou nativismo), noção segundo a qual pelo menos alguns aspectos do conhecimento são inatos.

Trata-se de uma ideia antiga, que remonta ao filósofo grego Platão, desde 400 anos antes de Cristo (STANFORD, 2005) e reelaborada por René Descartes (1596-1650), influente filósofo e matemático francês, que defendia que o raciocínio é uma faculdade unicamente humana, uma capacidade inata ao homem (DESCARTES, 1986). O alemão Immanuel Kant (1724-1804), outro influente filósofo, também defendia um nativismo, segundo o qual algumas categorias mentais preexistentes, como noções intuitivas de tempo e espaço, filtram as informações sensoriais na construção do conhecimento.

O empirismo e o inatismo se fazem presentes nas diferentes formas de se pensar a matemática. Ao reportar as principais correntes de pensamento dessa ciência, Nogueira (2006) observa que durante boa parte do Século XIX a geometria euclidiana foi considerada a base do conhecimento, mas a descoberta das geometrias não-euclidianas abalou não só os alicerces da matemática, mas de todo o conhecimento. Desde então os matemáticos passaram a buscar na aritmética uma "nova base sólida" para explicar o conhecimento matemático. Dentre as diversas correntes surgidas, três se destacaram: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo que, segundo Nogueira (2006), continuam até hoje a dividir os matemáticos quanto aos fundamentos de sua disciplina.

O *logicismo*, do matemático alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), definia toda expressão aritmética em termos lógicos, eliminando qualquer recurso à intuição e à linguagem comum, tese que o filósofo e matemático britânico Bertrand Russell (1872-1970) retomou, procurando demonstrar "que a matemática pura (incluída aí a geometria) poderia ser inteiramente deduzida da lógica." (NOGUEIRA, 2006, p. 137). Conforme Nogueira (2006), na visão de Frege, Russel e outros logicistas, o número seria definido em termos de classes e de relações seriais. Dada uma coleção, o aspecto cardinal seria estabelecido por aquilo que os elementos têm em comum entre si, permitindo que sejam agrupados em classes. Quanto ao aspecto ordinal, este seria estabelecido pelas relações assimétricas entre os elementos da coleção, isto é, por aquilo que eles têm de diferente e que possibilita que sejam seriados, por exemplo: do menor ao maior (NOGUEIRA, 2006, p. 141). O número, pois, seria definido como uma "classe de classes": uma classe abstrata em que o número 1 é a classe de todos os conjuntos unitários, o 2 a classe de todos os pares possíveis, o número 3 é a classe de todos os trios, etc.

O *intuicionismo* matemático foi profundamente influenciado pelas categorias mentais *a priori* ou inatas do pensamento de Kant, de modo que o tempo seria a fundamentação da intuição de número e, consequentemente, de toda a aritmética; e o espaço alicerçaria a geometria (NOGUEIRA, 2006, p. 128). As ideias de Kant constituíram a base do intuicionismo do matemático, físico e filósofo francês, Jules Henri Poincaré (1854-1912), o maior crítico do reducionismo lógico. Ele reivindicava que "para fazer aritmética, assim como para fazer geometria, é preciso algo mais que a lógica pura", sendo a intuição este "algo mais" (POINCARÉ, 1995, p. 18, apud NOGUEIRA, 2006, p. 143). Para Poincaré, o verdadeiro raciocínio matemático se originaria da intuição de número, a única intuição passível de certeza (NOGUEIRA, 2006). Poincaré apontava a existência de um círculo vicioso no logicismo, "porque o número já estaria presente ao se estabelecer a correspondência biunívoca entre os objetos singulares", pois o simples fato de dizermos: "*um* homem" isto já implica na individuação de um objeto e uma classe singular em que está implícito o número 1 (NOGUEIRA, 2006, p. 141). Em suma, a intuição do número puro para Poincaré não é a de um número específico e sim de um número qualquer, isto é, a "faculdade de conceber que uma unidade pode agregar-se a um conjunto de unidades" (POINCARÉ, 1943, p. 37, apud NOGUEIRA, 2006, p. 143).

Finalmente, temos o *formalismo*, baseado nos estudos do matemático alemão David Hilbert (1862-1943). Embora valorizasse a lógica, o formalismo de Hilbert sustentava que a base da matemática não está na lógica, mas sim no estudo dos sistemas simbólicos formais, ou seja, a matemática se resumiria em "uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos" (NOGUEIRA, 2006, p. 137). Nogueira (2006, p. 140) comenta que o formalismo teve curta existência após ter sido demonstrado "que não é possível provar a consistência de um sistema dedutivo formalizado capaz de abranger toda a matemática clássica com todos os seus princípios lógicos", de modo que o debate acerca dos fundamentos da matemática se centralizou em torno do logicismo e do intuicionismo.

Cognição numérica

Não obstante toda a discussão acima, nenhuma das principais correntes do pensamento matemático conseguiu uma resposta satisfatória para explicar a natureza e a origem do número. Foi Piaget o primeiro a propor que "somente uma investigação genética poderia conduzir a uma resposta mais conclusiva" (NOGUEIRA, 2006, p. 136). Em outras palavras, Piaget reivindicou que as investigações sobre o desenvolvimento cognitivo da criança seriam a grande oportunidade de realmente conhecermos como se formam os conceitos e qual seria a natureza do conceito de número.

No contexto da abordagem histórica e filosófica sobre a busca do "conceito de número" reportada nesta introdução, e no da reivindicação de Piaget de que é a psicologia o principal caminho que nos ajudará a esclarecer a origem e a natureza do número, é que se desenvolverá o presente capítulo. Inicialmente, veremos como vertentes filosóficas influenciaram teorias psicológicas sobre o desenvolvimento cognitivo. Em seguida, abordaremos as teorias que predominam no Brasil e como elas abordam a questão do conceito do número e o ensino da matemática, relacionando-as às principais correntes do pensamento matemático aqui esboçadas. Finalmente, trataremos das mais recentes pesquisas sobre o desenvolvimento cognitivo na moderna psicologia experimental e na neurociência cognitiva e suas implicações para as teorias clássicas do desenvolvimento cognitivo e do conceito de número e seu ensino.

As principais teorias do desenvolvimento cognitivo e suas origens

No debate empirismo x inatismo, relacionado com o debate mais específico sobre o conceito de número: logicismo x intuicionismo, a visão da mente da criança como uma *tábula rasa* influenciou a maior parte das teorias sobre o desenvolvimento cognitivo.

Entre os mais influentes empiristas encontra-se o aclamado cientista alemão, Hermann L. F. von Helmholtz (1821-1894), um dos fundadores da psicofísica e da psicologia experimental (GAZZANIGA; HEATHERTON,2005; LENT, 2001). Helmholtz propôs uma teoria da percepção baseada na inferência inconsciente, de acordo com a qual formamos percepções, ideias e relações sobre as coisas quase que naturalmente quando as experimentamos recorrentemente. Helmholtz já havia afirmado, em 1867, que o conhecimento surge na criança à medida que ela experimenta sistematicamente o mundo físico manipulando as coisas que vê e que tais manipulações começariam por volta dos seis meses de idade (HELMHOLTZ, 1962; SPELKE, 1998).

A percepção do bebê se restringiria, inicialmente, ao que se apresenta imediatamente aos sentidos. Ele só começaria a aprender além dos padrões sensórios imediatos por volta dos seis meses, quando age mais efetivamente no ambiente. Nesse período os bebês começam a relacionar as sensações visuais entre si como que mudando umas em relação às outras e a relacionar as sensações que surgem de suas ações. A partir dessas relações visuais e visomotoras, os bebês iriam aprendendo que certas propriedades dos arranjos visuais estão relacionadas a certas propriedades dos corpos que eles "sentem", que as margens colineares de um arranjo na retina tendem a pertencer a um único objeto movível e assim por diante (HELMHOLTZ, 1962; SPELKE, 1998). Em suma, nessa visão empirista as funções psicológicas se desenvolvem de fora para dentro, isto é, a percepção e a ação se desenvolvem com base na experiência sensorial e motora, ao passo que o pensamento se desenvolve com base na percepção e na ação (SPELKE, 1998; GELMAN, 2002; para uma revisão em português veja ANDRADE, 2006a, 2006b).

A visão de Helmholtz parece ter exercido forte influência sobre importantes personagens da psicologia. Conforme notou Meltzoff (2002, p. 7), nas visões clássicas do desenvolvimento intelectual, particularmente representadas nos escritos de Piaget, Vygotsky e Freud, o neonato é uma parte destacada do corpo do adulto em termos físicos, nada além disso. (veja também ANDRADE, 2006a, 2006b; SEIDL-DE-MOURA, 2004) Para Freud, por exemplo, no neonato haveria apenas o nascimento físico e não um nascimento mental. A concepção piagetiana não é muito diferente. Piaget (1970a, 1970b) afirmou que o bebê é um *solipsista* (do latim *solus* = só, único + *ipse* = mesmo)[1]. Na visão de Vygotsky, "a criança nos seus

[1] *Solipsismo* é uma doutrina filosófica segundo a qual a única realidade do mundo é o eu e que toda a realidade se resume nas experiências subjetivas e exclusivas do indivíduo, em suma, é a crença de que além de nós, só existem as nossas experiências (ANDRADE, 2006a, 2006b).

primeiros meses é uma criatura estritamente orgânica e associal, separada do mundo externo e totalmente limitada às suas funções fisiológicas [...], às fronteiras de seu próprio organismo e qualquer coisa que lhe traga prazer" (VYGOTSKY; LURIA, 1993, p. 150; veja também LURIA, 1976).

Gelman (2002) agrupa as várias teorias do desenvolvimento cognitivo em cinco grandes grupos ou tipos principais, dos quais quatro podem ser consideradas de base empirista (SPELKE, 1998; GELMAN, 2002). O primeiro tipo, muito relevante para a educação no mundo todo, é a "teoria do aprendizado". Segundo ela, o bebê nasce com um conjunto de reflexos (sucção, choro, preensão palmar etc.), os quais compõem um repertório básico de interação com o meio. Alguns desses reflexos, posteriormente, vêm a ficar sob controle operante, o que significa que as ações do bebê operarão em seu meio ambiente (físico e social) produzindo consequências e estas, por sua vez, terão um efeito retroativo sobre o organismo, no sentido de alterar a frequência daquelas ações para mais ou para menos. Por exemplo, o choro tem como consequência final a obtenção de alimento ou a remoção de um desconforto como o causado por fraldas sujas. Ambas essas consequências são providas pela mãe, elemento fundamental no meio social do bebê. O resultado é que a criança aprenderá a usar o choro como um meio de comunicação para atrair a atenção da mãe, que suprirá suas necessidades. Nessa teoria, o conhecimento é o resultado da interação do organismo com o seu meio e da capacidade de bebês e crianças em formarem associações entre os diversos estímulos, de modo que os conceitos refletem "as forças associativas que são construídas como uma função da frequência com a qual as sensações contíguas são experimentadas" (GELMAN, 2002, p. 2).

Um segundo tipo é a "teoria do processamento da informação". Ela se baseia no funcionamento do computador, em que *inputs* (informações entrantes) são processados, gerando *outputs* (comportamento). Grande atenção é dispensada ao processamento e modelos teóricos são formulados, muitos dos quais testados empiricamente por pesquisas neurocientíficas. Exemplo notável é o da memória, com suas diversas subdivisões categorizadas em memórias de curto e de longo prazos, a transformação de uma em outra e os modos de estocagem e recuperação da informação. Assume-se que os bebês vêm ao mundo equipados com alguns mecanismos sensoriais e perceptivos (com os sistemas visual e auditivo altamente organizados), juntamente com sistemas cognitivos muito básicos e sem nenhuma especificidade de domínio, tais como uma memória de curto prazo e uma grande capacidade de associação.

O terceiro tipo de teoria é a abordagem sociocultural. Assim como a "teoria do aprendizado" e a "teoria do processamento da informação", ela também considera o desenvolvimento como uma função da experiência, a qual se inicia com processos sensoriais e motores de natureza geral, baseados somente nos reflexos inatos para depois se consubstanciarem em experiências conceituais e baseadas na linguagem. Porém, o que distingue a abordagem sociocultural diferenciando-a das duas primeiras é a ênfase na sensibilidade e maleabilidade dos bebês às interações sociais e sua importância na aquisição dos conceitos, ou seja, o papel mais ativo do bebê no seu próprio desenvolvimento cognitivo. Dentro da abordagem sociocultural, as ideias de Piaget e Vygotsky representam um quarto tipo de pensamento que compreende as teorias socioconstrutivistas, as quais constituem a base norteadora da educação no Brasil nos últimos 30 anos. As teorias socioconstrutivistas assumem que o desenvolvimento da inteligência se dá ao longo de sucessivos estágios, nos quais os conceitos se formam de maneira progressiva, diferenciando-se qualitativamente à medida que avançam. As estruturas cognitivas mais iniciais são de propósitos gerais, tornando a criança suscetível a equívocos de interpretações das informações e a erros conceituais.

A despeito de diferenças fundamentais entre os quatro primeiros tipos de teorias acima resumidos, todas convergem no sentido de que os bebês vêm ao mundo desprovidos de qualquer estrutura mental mais complexa que lhes permitam a formação de conceitos, por mais simples que sejam, mesmo a simples individuação de um objeto (GELMAN, 2002; SEIDL-DE-MOURA, 2004; ANDRADE, 2006a, 2006b). Em outras palavras, os bebês vêm ao mundo sem uma estrutura mental que se relacione diretamente com o tipo de mundo conceitual, linguístico e social que eles vão encontrar na sociedade. Outra ideia compartilhada pelas quatro teorias é que as crianças precisam de aproximadamente dois anos para começar a fazer representações internas do mundo.

Dessas quatro correntes teóricas, nós focaremos somente a "teoria da aprendizagem", a partir da visão da análise do comportamento e as teorias socioconstrutivistas, uma vez que estas constituem as teorias de maior influência e relevância para a educação no Brasil (SEIDL-DE-MOURA, 2004; ANDRADE, 2006a; 2006b). A primeira tem sua relevância principalmente porque é uma das correntes mais presentes nos currículos de graduação e pós-graduação, tanto dos cursos de psicologia quanto nos de educação. E a segunda porque tem sido tomada como norte não só em termos curriculares, mas das políticas educacionais do país, incluindo as orientações pedagógicas fundamentais ditadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

O quinto tipo corresponde a um grupo de teorias mais atuais, as quais são agrupadas sob o rótulo provisório de "construtivismo racional". Trata-se de estudos motivados pelo trabalho inestimável e seminal de autores como Piaget, Vygotsky e Skinner e assumem com eles a importância do ambiente e o papel ativo da criança na aquisição do conhecimento. Ao mesmo tempo, porém, assumem também que há uma série de habilidades inatas, incluindo percepções complexas e conceitos básicos que motivam e ajudam a criança a selecionar e aprender sobre os aspectos relevantes do meio. Levam-se em conta tanto evidências comportamentais quanto neurológicas, que trazem à luz os equívocos da visão empirista (GAZZANIGA; HEATHERTON, 2005, p. 342).

Pesquisas demonstram que bebês preferem estímulos visuais apresentando padrões da face humana a estímulos semelhantes sem tais padrões e que eles prestam mais atenção a estímulos novos, auditivos ou visuais, do que a estímulos familiares, o que evidencia sua capacidade discriminativa e permite inferir memória auditiva e visual. Bebês recém-nascidos são capazes de discriminar entre a prosódia (ritmo e entonação) da fala de sua língua materna e de uma língua estrangeira. Eles também discriminam todas as centenas de sons linguísticos (fonemas) do mundo todo, bem como melodias musicais, sendo capazes de lembrar melodias ouvidas ainda na fase intrauterina. E, algo impressionante, bebês de poucos meses discriminam arranjos de estímulos visuais ou auditivos diferindo em numerosidade, assim como apresentam noção rudimentar de soma e subtração (para revisões mais exaustivas desses temas e referências mais completas, ver ANDRADE, 2006a, 2006b; ANDRADE; PRADO, 2003).

Graças a um corpo crescente de evidências produzidas por uma série de recursos disponíveis atualmente – como os de neuroimagem, entre vários outros – somada a evidências comportamentais, hoje conhecemos a complexidade cerebral presente desde o nascimento, com áreas inteiras que já vêm diferenciadas e complexamente interconectadas (ANDRADE, 2006a, 2006b), envolvidas diferencialmente em modalidades sensório-perceptivas e motoras, bem como em habilidades cognitivas como memória de curto prazo, números, linguagem, música etc. Como já havia proposto William James no século XIX, a mente é um recurso fisiológico como outro qualquer, que passou a existir e a funcionar do modo como funciona porque ajudou o organismo a se adaptar melhor ao meio ambiente, à sobrevivência e à transmissão de genes para futuras gerações (GAZZANIGA; HEATHERTON, 2005). Por conseguinte, a continuidade entre biologia e cultura (ANDRADE, 2006a, 2006b; BUSSAB, 2000; PRADO, 2010) deve ser mais amplamente discutida e nortear as pesquisas tanto sobre a aquisição e desenvolvimento de habilidades culturalmente construídas, incluindo as habilidades numéricas (PRADO, 2010), como sobre dificuldades de aprendizagem relativamente específicas (ANDRADE, 2006a, 2006b).

Nas seções seguintes, discutiremos como as teorias socioconstrutivistas e a análise do comportamento veem o conceito de número e o desenvolvimento das habilidades numéricas na criança e de que forma a linguagem está relacionada a essas competências. Depois faremos uma breve incursão sobre as mais recentes abordagens da psicologia experimental e da neurociência cognitiva e a produção de evidências científicas sobre os correlatos neurais dos principais aspectos do comportamento numérico. Finalmente, discutiremos as implicações desses achados para as diferentes teorias e para a pesquisa sobre a aprendizagem da matemática e suas dificuldades.

A origem dos conceitos nas teorias socioconstrutivistas de Piaget e Vygotsky

Piaget e Vygotsky são os dois teóricos da psicologia com maior influência na educação brasileira. Em que pesem diferenças fundamentais entre eles, particularmente com relação ao papel da linguagem, ambos convergem em dois princípios básicos. Primeiro, não há nada de inato na cognição humana, isto é, os neonatos saem do útero materno com um repertório limitado de reflexos e uma motivação para aprender. Segundo, no primeiro ano de vida o bebê não possui percepção nem memória estáveis. Somente após um longo período de experiências sensório-motoras, que se inicia aos quatro meses e se completa por volta de um ano e meio a dois anos, é que a criança se torna capaz de representar mentalmente objetos, eventos, etc. em termos de conceitos e de raciocinar sobre eles.

A partir desses dois princípios, outros dois são postulados. O terceiro é que a partir dos dois anos, devido às limitações das primeiras experiências perceptivas e motoras as primeiras concepções dos bebês e crianças novas são inapropriadas, pois se baseiam em percepções mais primitivas do que as dos adultos, governadas por uma lógica própria, qualitativamente distinta. Um quarto princípio sustenta que na medida em que as crianças se desenvolvem, elas superam essas limitações, de modo que as concepções iniciais sofrem mudanças qualitativas, dando lugar a concepções cada vez mais apropriadas, numa progressão em estágios de desenvolvimento cognitivo, até chegarem às concepções adultas.

Por exemplo, uma tese central de Piaget é que "no começo está a ação" e tudo começa na "lógica das ações" (LIMA, 1999, p. 217), de modo que a vida psicológica do organismo é a ação ou comportamento interiorizado (LIMA, 1999, p. 145). Isto é, os bebês são equipados com esquemas de ação que estão funcionais desde o nascimento: os reflexos de sucção e preensão, sensibilidade à luz e ao som, o choro, os gritos e fonações, movimentos dos braços, da cabeça ou do tronco, etc. Mas, entre zero e 18 meses (estágio sensório-motor) eles ainda não diferenciam entre o eu e o mundo ao redor. Piaget (1970b) argumenta que após o quarto mês, embora a criança comece a coordenar seus esquemas – por exemplo: agarrando objetos e levando-os à boca (preensão, sucção), balançando-os para produzir sons, (motor, auditivo) etc. – ela ainda não possui a noção de "permanência do objeto", isto é, não consegue pensar sobre ele na sua ausência, não o representa interiormente. É como se, fora do campo de visão, o objeto deixasse de existir. Essa noção só se desenvolveria por volta de 18 meses.

Piaget (1970a) também demonstrou que nos primeiros anos de vida, aproximadamente entre dois e sete anos (estágio pré-operacional), os conceitos das crianças sobre o mundo dos objetos, suas relações físicas, espaciais, quantitativas etc. ainda são incompletos e imperfeitos, o que pode ser observado pelas suas respostas a perguntas específicas sobre física e aritmética básicas. Por exemplo, quando transformamos uma bola de argila para um formato alongado, como o de uma salsicha, ou transferimos a mesma quantidade de líquido de um copo largo e baixo para outro mais estreito e alto, as crianças no estágio pré-operatório normalmente não compreendem que há conservação da massa ou líquido e acreditam num aumento (ou diminuição) de sua quantidade.

Vygotsky (1986) concorda basicamente com as descrições de Piaget, às quais ele se referiu como os “novos fatos” descobertos por um método que se constitui numa “ferramenta inestimável para o estudo do pensamento da criança” e “nos dá quadros da vida real, coerentes e detalhados” (VYGOTSKY, 1986, p. 14). De forma semelhante a Piaget, Vygotsky e Luria (1996) argumentaram que entre dois e quatro anos, o mundo externo é percebido de uma maneira primitiva, pois as percepções visuais são governadas por princípios diferentes e não há, para a criança, coisas tais como profundidade e perspectiva. O mundo visual seria percebido como tão próximo que a criança tenta agarrar e tocar coisas que se encontram fora de seu alcance.

Como apontado acima, há duas diferenças fundamentais entre Piaget e Vygotsky. A primeira reside no papel da linguagem e na função da fala egocêntrica no desenvolvimento dos conceitos e da inteligência, esta um aspecto fundamental nas teorias de ambos. A fala egocêntrica se refere a uma fase em que parte significativa da fala do pré-escolar não se dirige a um interlocutor específico nem leva em conta o conhecimento ou os interesses do ouvinte (ELLIOT, 1982, p. 43; ver também MONTOYA, 2006). Na perspectiva de Piaget, a inteligência não se origina na linguagem, mas, ao contrário, a linguagem é uma consequência de desenvolvimentos internos, como a aquisição da permanência do objeto e da capacidade de pensar ou produzir imagens mentais sobre os objetos e ações (por volta de um ano e meio), à qual Piaget denominou de “função semiótica” (MONTOYA, 2006). Em outras palavras, toda inteligência, assim como a própria linguagem, tem na função semiótica um marco fundamental (LIMA, 1999, p. 100). Assim, não obstante a linguagem nunca aparecer como um objeto do desenvolvimento na teoria piagetiana, ela aparece com uma importante ferramenta metodológica. Nesse sentido, Piaget a utilizou como uma fonte de dados sobre as aquisições cognitivas num determinado momento do desenvolvimento, de modo que para ele a fala egocêntrica reflete formas rudimentares de pensamento. Vygotsky, em contraste, via a linguagem como um objeto do desenvolvimento e como precursora do pensamento na sua forma verbal (ELLIOT, 1982). Para o autor (VYGOTSKY, 1986; VYGOTSKY; LURIA, 1996), os esquemas sensório-motores não são formas rudimentares de pensamento e inteligência que evoluem para a lógica formal dos adultos, como acreditava Piaget, mas apenas capacidades puramente utilitárias e não inteligentes: é o surgimento da linguagem, por volta dos dois anos, que determina o pensamento que, através da fala egocêntrica, vai aos poucos se tornando fala interna que, no adulto se constitui no pensamento verbal, a essência do pensamento.

Um pequeno acidente é tomado por Vygotsky como evidência de que a fala egocêntrica não permanece como um mero acompanhamento da atividade psíquica da criança. Uma menina de cinco anos e meio desenhava um bonde e de repente a ponta de seu lápis quebrou. Vendo, então, frustrada sua tentativa de tentar pressionar fortemente o lápis contra o papel para continuar o desenho, ela murmurou para si mesma: "está quebrado". A partir daí ela mudou seus planos e recorreu às aquarelas, passando a desenhar um bonde que se quebrou após um acidente, "continuando a falar consigo mesma de tempos em tempos sobre a mudança em seu desenho" (VYGOTSKY, 1986, p. 31). Ele observou que esta mudança de projeto ocorreu somente após a criança ter murmurado para si mesma "quebrou", e desde esse momento em que a criança passou a falar consigo mesma ela mudou o seu desenho. Vygotsky interpretou que a fala egocêntrica foi provocada pelo "acidente" e, por sua vez, a atividade da criança de uma forma que não pode ser interpretada apenas como um mero subproduto do pensamento, mas sim um fator determinante de mudanças altamente complexas, tornando-se uma função de direção e planejamento, assim elevando seus atos ao nível do comportamento intencional, autodirigido com a mediação da linguagem (VYGOTSKY, 1986). A fala egocêntrica não pode ser confundida como um mero subproduto do pensamento, "um acompanhamento que não interfere na melodia" (VYGOTSKY, 1986, p. 31-32). Ela é um estágio intermediário para a fala interna ou pensamento verbal do adulto, caracterizando a linguagem como um componente essencial e inextricável do pensamento, nos mesmos moldes do filósofo e linguista alemão Wilhelm von Humboldt (1767-1835).

A segunda diferença fundamental entre os dois autores refere-se à forma como os conceitos se desenvolvem. Para Piaget, os conceitos espontâneos da criança e os conceitos aprendidos dos adultos são sempre qualitativamente distintos e mutuamente antagônicos e o desenvolvimento é caracterizado por sucessivos conflitos cognitivos entre uma fase e outra. Os conflitos cognitivos ocorrem quando os esquemas sensório-motores existentes são incapazes de assimilar novas informações, gerando um desequilíbrio, o que força a criança a construir novos esquemas sensório-motores de assimilação e acomodação (LIMA, 1999). Os conflitos cognitivos nos pontos de "transição" entre uma fase e outra, que são a essência do desenvolvimento e do aprendizado na teoria piagetiana, representam uma noção de descontinuidade no desenvolvimento dos conceitos. Em contraste, Vygotsky (1986, p. 155-157) sustenta que o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e não espontâneos não são antagônicos, mas sim análogos e "estão relacionados e influenciam constantemente um ao outro", de modo que o desenvolvimento cognitivo é um processo contínuo e único.

Analisemos agora a proposta de Piaget com relação ao conceito de número sob uma perspectiva do desenvolvimento cognitivo.

O número e a matemática em Piaget

Piaget e Szeminska (1981) publicaram um estudo sobre o desenvolvimento do conceito de número, feito com crianças no período pré-operatório (dois a sete anos). As tarefas foram ministradas no contexto do método clínico, que se baseia na livre conversação entre o experimentador e a criança. As perguntas seguem o rumo determinado pelas respostas do participante e, naquele caso, focavam o que Piaget considerava as principais "qualidades" ou "necessidades" do número para existir "a *conservação de quantidades* (condição de todo e qualquer conhecimento), *a corres-*

pondência termo a termo (essencial para a contagem), a determinação da *cardinalidade* e do *princípio ordinal* (aspectos indissociáveis do número)" (NOGUEIRA, 2006, p. 136). A noção da conservação de massa foi testada nas tarefas de 'transformação física' de massa de modelar, de volume na transposição da mesma quantidade de líquidos em diferentes recipientes, e de número na comparação de fileiras mais ou menos alongadas contendo o mesmo número de objetos. A "correspondência termo-a-termo" (ou biunívoca) se refere à habilidade de designar cada palavra-número da contagem a um, e somente um, determinado objeto da coleção. E, finalmente, a determinação da "cardinalidade" é a compreensão de que a última palavra-número corresponde à quantidade total da coleção contada.

Nesses estudos, Piaget e Szeminska (1981) observaram que no estágio pré-operacional (dois a sete anos) as imagens mentais já permitem o desenvolvimento da habilidade de agrupar objetos em classes ou ordená-los em séries, isto é, operar sobre as relações simétricas (agrupar objetos de acordo com suas semelhanças em certas qualidades como cor, formato etc.) e assimétricas (ordenar ou seriar os objetos de acordo com suas diferenças, como o tamanho). Entretanto, nesse período a criança ainda não adquiriu a noção de "conservação de quantidades" (massa, volume e número) de modo que quando objetos ou grupos de objetos são transformados na forma ou ordem, sem alterar a quantidade, ela sempre responde, por exemplo, que há "mais" massinha depois que uma bola de argila é alongada e que há mais líquido depois que este é transferido de um copo baixo e largo para outro mais estreito e alto. Em suma, nessa fase predomina um pensamento simbólico ou intuitivo (pré-lógico) em que a criança não consegue reverter mentalmente a ação e ainda não pensa num nível lógico ou operatório (o termo "operação", na visão piagetiana, grosso modo significa ação interiorizada), fundamental às operações matemáticas mais elementares.

Conforme nota Lima (1999, p. 238-239), a noção de conservação das transformações físicas é a primeira evidência da noção de "reversibilidade" (a toda ação ou operação existe o seu inverso), noção esta que "faz do pensamento instrumento de ação (virtual) imensamente superior à operação motora" e requisito básico para as operações elementares da lógica e da matemática, incluindo o conceito de número. É somente por volta dos sete anos, com a aquisição da reversibilidade, a qual parece estar associada à síntese das noções de inclusão (classe) e ordem (seriação) que possibilita a noção de número, é que a criança atinge o estágio de pensamento lógico, baseado em ações mentais reversíveis, chamado de estágio operacional-concreto (LIMA, 1999). Piaget e Szeminska (1981, p. 12, apud NOGUEIRA, 2006, p. 140) concluíram que esses resultados suportam a ideia de que o conceito de número na criança se origina de um longo processo entre os dois e sete anos de idade, que culmina na "síntese operatória da classificação e seriação", por volta dos seis a sete anos.

> [...] o número se organiza, por etapas, em solidariedade estreita com a elaboração gradual dos sistemas de inclusões (hierarquia das classes lógicas), com as relações assimétricas (seriações qualitativas) e com a sucessão dos números, constituindo- se, assim, em síntese operatória da classificação e seriação.

Podemos, pois, concluir que o conceito de número em Piaget é essencialmente baseado no logicismo, isto é, definido nos termos puramente lógicos de classe e relações assimétricas (seriação). Desse modo, para Piaget, as crianças nasceriam sem qualquer ideia pré-concebida de objeto e muito menos de número, o qual seria construído após um longo percurso das interações sensório-motoras com o ambiente, num período pré-lógico e pré-numérico do desenvolvimento entre os dois e sete anos (estágio pré-operatório) e se consubstanciaria a partir da síntese de dois conceitos pré-lógicos e pré-numéricos, a classificação e a seriação, respectivamente, por volta dos sete anos de idade.

Piaget também considerou que sua hipótese de que "o número é classe e relação assimétrica ao mesmo tempo" é uma visão alternativa mais completa do que a do logicismo tradicional, o qual procura "conduzir o número cardinal à noção de classe de classes e o número ordinal, dissociado do primeiro, à de classe de relações" (PIAGET, 1981, p. 13). Ao mesmo tempo, Piaget também considera que seu conceito de número, por não derivar de nenhuma operação lógica particular e sim somente da sua reunião, este conceito também concilia a continuidade da lógica com a irredutibilidade do intuicionismo (isto é, que o número não pode ser reduzido a operações lógicas inferiores a ele) de modo que "leva a conceber como recíprocas e não mais como unilaterais as relações entre a lógica e a aritmética" (PIAGET, 1981, p. 13, apud NOGUEIRA, 2006, p. 141). Nogueira (2006, p. 141) propõe que, embora seu conceito de número tenha por fonte a lógica, as reflexões de Piaget sobre uma conciliação entre o logicismo e o intuicionismo sugerem que seu objetivo fundamental era propor "um *tertium* entre as definições de número propostas por duas das principais correntes do pensamento matemático: o logicismo de Russel e o intuicionismo de Poincaré". O termo latino *tertium* significa "terceiro" e Piaget o usava para se referir a uma terceira explicação que ao mesmo tempo que nega, incorpora e sintetiza as outras duas teorias conflitantes, superando-as. Conforme nota Nogueira (2006), Piaget já havia proposto que sua teoria psicogenética (origem do pensamento) seria um *tertium* ideal entre o apriorismo kantiano e o empirismo de John Locke, bem como entre o lamarckismo e o neodarwinismo.

A linguagem e o número e o ensino da matemática na visão piagetiana

A partir de suas pesquisas Piaget concluiu que "o desenvolvimento da linguagem não provoca o desenvolvimento paralelo das operações mentais, ao passo que o contrário ocorre" (PIAGET, apud LIMA, 1999, p. 100), de modo que a linguagem é uma consequência, uma superestrutura da inteligência sensório-motora (LIMA, 1999). De fato, Piaget e Szeminska (1981) argumentam que seus resultados revelam que a numeração falada, isto é, a contagem tem muito pouco a ver com a aquisição da correspondência termo-a-termo em termos de causação dessa correspondência.

Em um de seus experimentos, Piaget e Szeminska (1981) pediram às crianças para separarem um número de objetos a partir da correspondência termo-a-termo com outro grupo de objetos como, por exemplo, separar um bombom para cada moeda de uma coleção, de modo que para um arranjo de quatro bombons deveriam pegar quatro moedas. Depois de realizada a correspondência, as moedas eram escondidas e as crianças solicitadas a dizer sua quantidade, isto é, a demonstrar a compreensão da propriedade de cardinalidade designada pela última palavra-número da contagem. Conforme os autores, as crianças até mais ou menos seis anos não conseguiam responder corretamente ou, quando conseguiam, mudavam de ideia após um tempo (ou, talvez após contra-argumentações do experimentador, uma vez que o método clínico piagetiano é baseado no livre diálogo entre sujeito experimental e experimentador). Eles notaram que embora a atenção à contagem faz com que as crianças cheguem à ideia de que a correspondência é durável, quando elas tentam abstrair a totalidade cardinal elas falham (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p. 97).

Assim, Piaget e Szeminska entenderam que o aprendizado da contagem influi muito pouco no resultado da correspondência termo-a--termo e concluíram que:

> [...] não é exagero dizer que este fator verbal não desempenha qualquer papel no próprio progresso da correspondência e da equivalência [...]. Sem dúvida, no momento em que a correspondência se torna quantificante e dá assim nascimento a começos de equivalência, a numeração falada pode acelerar o processo de evolução (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p. 97).

A influência das ideias piagetianas se fez sentir fortemente no âmbito da matemática escolar, produzindo modificações importantes no modo de se ensiná-la, dando origem, por exemplo, ao movimento que ficou conhecido como "Matemática Moderna" ou "Movimento Renovador", na década de 1970 (BURGO, 2007). Veremos que a tendência geral passou a ser de renúncia à contagem e aos algoritmos, considerados partes de uma pedagogia errônea baseada na linguagem, um "verbalismo" que reflete o *método da autoridade oral (LIMA*, 1999, p. 100), passando a ênfase a recair sobre o ensino baseado na atividade exploratória do mundo dos objetos e suas relações lógico-matemáticas de classe e série para a construção do conceito de número.

Como implicação, as orientações pedagógicas para as séries inferiores incluem objetivos puramente lógicos, tendo-se sempre em vista o grau de desenvolvimento mental do aluno (de acordo com os estágios piagetianos) e os interesses para os quais têm maior inclinação. O ensino deve se basear no envolvimento ativo do aluno em atividades em que ele tem o papel de descobridor e não de receptor passivo do conhecimento, renunciando-se completamente à prática da memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático de demonstrações já feitas (BICUDO, 1942, p. 156, apud BURGO, 2007,

p. 52). A Matemática Moderna, por sua vez, apregoava que o ensino da matemática tinha malogrado nas escolas porque oferecia uma matemática antiquada, de linguagem imprecisa e ultrapassada, propondo um ensino revolucionário em que as crianças aprendem de uma forma muito mais lógica, através de descobertas a partir de suas próprias ações, aproximando--as, assim, da matemática dos cientistas. A Matemática Moderna seria um método que ensina a pensar, enfatizando o aprendizado puramente por meio da lógica e sem a realização de cálculos desnecessários, sem assustar (BURGO, 2007, p. 57).

Lauro de Oliveira Lima, considerado um dos primeiros divulgadores das ideias de Piaget no Brasil, criou o "Método Psicogenético" (LIMA, 1975), estruturado a partir da teoria de Piaget e baseado em atividades planejadas e na dinâmica de grupo (pois a discussão entre todos é a didática fundamental), envolvendo jogos, pesquisas, leituras, passeios, etc. (LIMA, 1975). Conforme Lima (1975, p. 31) a dinâmica de grupo é a didática básica em que o princípio fundamental é que "o professor não ensina; ajuda o aluno a aprender". Lima (1999, p. 108), de fato, enfatiza que "a professora deve convencer-se de que não deve dar aula, deixando a atividade (altamente dirigida e nada espontânea, como recomenda Piaget) por conta da criança (resolver situações-problema propostas)".

Especificamente com relação ao ensino da matemática, Lima (1999) argumenta que uma vez que as estruturas ou esquemas lógico-matemáticos são, para Piaget, as estruturas fundamentais da conduta e do pensamento humano, ou seja, da inteligência, "a grande revolução pedagógica vai ser uma reversão da linguagem para a Matemática" (LIMA, 1999, p. 102), de modo que a própria linguagem deveria ser estimulada pela "exercitação de processos lógicos" (LIMA, 1999, p. 101). Nessa perspectiva, o ensino da matemática deve se iniciar pela atividade procedural (desenvolvimento de ações e relações entre os objetos), pois a abstração matemática se desenvolve a partir da experiência física (atributos e qualidade dos objetos) e da experiência lógico-matemática (desenvolvimento de estratégias de manipulação dos objetos) (LIMA, 1999, p. 100-101). Conforme Lima (1999), "a linguagem só ganha importância (e, agora, importância fundamental) quando alcança o nível das proposições e se iniciam as combinações lógicas", isto é, no período das operações abstratas (operacional-formal), de 11 a 15 anos (p. 66). Assim, iniciação matemática não significa ensinar cálculo (contar, somar, dividir etc.), mas sim construir, por meio da ação e construção das relações entre os objetos, as estruturas de classificação, seriação, partição, correspondências, redes, grupos etc.

De acordo com Burgo (2007, p. 59-60), o método psicogenético de Lauro de Oliveira Lima (exposto em mais de 20 obras), foi o grande responsável por divulgar as ideias de Piaget no Brasil e contém o que é conhecido como "Os Dez Mandamentos da Escola Piagetiana", dentre eles, não ensinar (mas sim provocar a atividade da criança), não trabalhar na base da linguagem nem da memorização, aceitar sempre as respostas das crianças, mesmo que erradas, pois elas correspondem ao seu nível mental etc.

Constance Kazuko Kamii, uma psicóloga nipo-americana nascida na Suíça e discípula de Piaget, é a escritora piagetiana de maior influência no ensino da matemática na educação infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental no Brasil e em toda a América Latina. De acordo com Nogueira, Belini e Burgo (2007) a obra de Kamii convence os professores de que não é possível ensinar número às crianças. A construção do pensamento matemático não pode ser transmitida à criança, pois é produto da atividade do sujeito e deve se basear em jogos em grupo e situações do cotidiano (KAMII, 1995; KAMII; DECLARK, 1986). A principal crítica de Kamii ao ensino tradicional, nos mesmos moldes de Lima (1999), contra o "verbalismo" dos algoritmos das contas de somar, dividir e multiplicar, é o uso dos algoritmos cujo efeito nocivo ela afirma ser o de embotar a capacidade de pensar e os quais devem ser substituídos por atividades interindividuais como os jogos.

Com relação às dificuldades de aprendizagem na matemática, Piaget e os defensores da teoria piagetiana são enfáticos em atribuí-las todas às abordagens de ensino que privilegiam os aspectos linguísticos como a contagem e os algoritmos. Segundo Lima (1999),

> o fracasso universal (em todos os tempos) na aprendizagem da Matemática mostra um equívoco intrínseco no processo educativo, pois, sem o domínio das estruturas lógico-matemáticas, a apreensão da realidade é fantasmagórica, fato mascarado pelo uso da linguagem. (p. 102)

Como vimos, o próprio Piaget fazia frequentes advertências que o ensino eminentemente linguístico e verbalista e com uso prematuro do formalismo, representavam fortes chances de fracasso (LIMA, 1999), o que é assumido de uma forma geral por todos os autores piagetianos (BURGO, 2007).

O pensamento e a linguagem em Vygotsky

Em Piaget a linguagem é separada do pensamento, apenas uma ferramenta do pensamento no mesmo sentido proposto por Santo Agostinho (AGOSTINHO, 1999) no século IV (d.C.) e pelo filósofo empirista inglês John Locke no século XVII, que acreditavam que as palavras eram simples ferramentas do pensamento apenas como representação simbólica e não formadora dos conceitos. Descartes também argumentou nessa direção ao afirmar que a razão estaria fundamentada não na linguagem, mas sim em nossa capacidade inata dos princípios geométricos Euclidianos (DESCARTES, 1986). Essa separação entre pensamento e linguagem é uma visão compartilhada por muitos filósofos e psicólogos contemporâneos (FODOR, 1983; PINKER, 1994; BLOOM, 2000) que sustentam que a linguagem que falamos não afeta a forma como pensamos, com base na evidência de que é plenamente possível a existência de pensamentos abstratos, ricos e complexos, mesmo em lesões cerebrais que causam afasias (déficits na comunicação verbal), ou cérebros privados de estímulos linguísticos e, portanto, sem a linguagem natural. Em contrapartida, o filósofo e linguista alemão Wilhelm von Humboldt, defendia que a linguagem não é somente uma ferramenta de representação ou comunicação de ideias que existem independentemente dela, mas sim um "órgão constitutivo do pensamento", essencial para a produção de novos conceitos, os quais não existiriam sem ela, de tal modo que diferentes línguas não significam somente diferentes "sons e sinais" mas também "diferenças na representação do mundo" (STANFORD, 2007). Esse determinismo linguístico no pensamento humano influenciou toda uma geração de linguistas que defendem a ideia de que o pensamento não existiria sem a linguagem, (WHORF, 1956; SAPIR, 1921).

Para Vygotsky, as palavras influenciam até a percepção, a forma como vemos as coisas. As palavras permitiriam à criança focar melhor a atenção nos objetos e eventos e, portanto, a formar percepções mais eficientes. Dessa forma, as crianças começam a perceber, a construir relações entre os objetos e eventos e, finalmente, a representar o mundo através da fala. Ele observa, por exemplo, que entre os dois e três anos de idade ocorre uma súbita curiosidade pelas palavras e seu valor simbólico: a criança começa a fazer perguntas sobre tudo que é novo, "a fala começa a servir o intelecto e os pensamentos começam a ser falados" (VYGOTSKY, 1986, p. 82), resultando em uma explosão de vocabulário. Através das palavras a atenção involuntária passa a ser voluntária e inteligente e a memória puramente mecânica transforma-se em memória lógica, isto é, a criança começa a perceber o mundo e adquirir memória através das palavras (VYGOTSKY, 1986, p. 166). Entre os três e sete anos, a fala egocêntrica (que para Piaget simplesmente reflete as percepções e conceitos ainda incompletas e imperfeitas) é um marco do processo de desenvolvimento linguístico e cognitivo, no qual os pensamentos verbalizados vão, aos poucos, se tornando fala interna e "pensamento verbal" (VYGOTSKY, 1986, p. 87-88) de modo que pensamento e fala se tornam uma só coisa: a unidade ou célula de pensamento verbal, a qual não pode ser analisada (VYGOTSKY, 1986, p. 211-212). Para Vygotsky (1986, p. 212) não há pensamento sem fala e o significado, portanto, "é um critério da palavra" e "pode ser considerado como um fenômeno da fala".

Na visão de Vygotksy (1986) "as formas superiores, especificamente humanas de comunicação psicológica são possíveis porque a reflexão do homem sobre a realidade é realizada em conceitos generalizados" (p. 8), de modo que "todos os conceitos são generalizações" (p. 107), generalizações estas que só são possíveis por meio das palavras, isto é, da linguagem

> uma palavra não se refere a um objeto, mas a um grupo ou a uma classe de objetos. Cada palavra já é, portanto, uma generalização. A generalização é um ato verbal de pensamento e reflete a realidade de uma forma bem diferente do que a sensação e a percepção a reflete. (VYGOTSKY, 1986, p. 6).

Para Vygotsky, se a formação de conceitos é um ato de generalização, este é realizado através das palavras, uma vez que a própria palavra constitui-se numa generalização, de modo que:

> nem o desenvolvimento de associações de números, nem o reforçamento da atenção, nem a acumulação de imagens e representações, nem a determinação de tendências – que nenhum destes processos, por mais avançados que possam ser, pode levar à formação de conceitos. Os conceitos reais são impossíveis sem palavras e pensar em conceitos não existe além do pensamento verbal. (VYGOTSKY, 1986, p. 107).

Para finalizar essa sequência de parágrafos exposta de forma praticamente silogística, conclui-se que a palavra não é somente a unidade de pensamento verbal (união de pensamento e fala), mas também a união de generalização e comunicação (VYGOTSKY, 1986, p. 9); em outras palavras “em qualquer idade, um conceito encarnado numa palavra representa um ato de generalização.” (p. 171).

A partir dessa lógica traçada por Vygotsky (1986), ele afirmou que “seria errado [...] considerar pensamento e fala como dois processos não relacionados ou paralelos ou, então, se cruzando em certos pontos e influenciando um ao outro” (p. 211), assumindo que um fato incontestável e de grande importância é que o pensamento é determinado pela linguagem, isto é, pelas ferramentas linguísticas de pensamento e pela experiência sociocultural da criança (1986, p. 94). Finalmente, Vygotsky (1986, p. 94) explicita que suas principais conclusões são que “o estágio do desenvolvimento da fala interna e do pensamento verbal não é uma simples continuação do pensamento pré-verbal da criança”, pois “a própria natureza do desenvolvimento muda do biológico para o sócio-histórico”, isto é, uma vez que o pensamento verbal “não é uma forma natural, inata de comportamento”, mas em vez disso “é determinado por um processo histórico-cultural”, ele apresenta propriedades específicas e leis que não podem ser encontradas nas formas naturais de pensamento e fala. Assim, reivindica que a linguagem, diferentemente de Santo Agostinho, John Locke e Piaget, é um componente essencial e inextricável do pensamento nos mesmos moldes do filósofo e linguista alemão Wilhelm von Humboldt.

Voltando à matemática, Vygotksy (1986) propõe uma evolução das generalizações através da própria evolução do significado das palavras, dentro da qual surge o conceito de número. Nós veremos nos parágrafos seguintes que, para o autor, o conceito de número se desenvolve a partir das primeiras palavras que já encerram generalizações de classe (ou categoria) dos objetos, como cadeira, mesa, ou camisa, calça, etc. Depois adquirem as palavras que representam generalizações cada vez mais complexas a partir das anteriores como mobília, roupa, etc. É nesse processo que a aquisição das palavras-número vai aos poucos desenvolvendo a noção de número e de conceitos matemáticos, dos mais simples aos complexos.

O número e a matemática em Vygotsky

De acordo com Vygotsky (1986, p. 135 e 149), seus estudos sugeriam três fases principais no desenvolvimento do pensamento verbal, ao longo do qual o significado das palavras evolui e se constrói o conceito de número.

Na primeira fase da formação dos conceitos, caracterizada pelo que Vygotsky e Piaget chamaram de “pensamento sincrético” (VYGOTSKY, 1986, p. 17, 54, 111-112, 149 e 199), a palavra é uma generalização do tipo mais primitivo associada a imagens sincréticas, isto é, a características perceptivas mais globais que definem categorias de simples objetos (cadeira, mesa, sofá).

Mas à medida que o intelecto da criança se desenvolve vão surgindo palavras referentes a generalizações de nível cada vez mais elevado, dando origem à segunda fase denominada “pensamento por complexos” (VYGOTSKY, 1986, p. 112), na qual os objetos encontram-se inter-relacionados no cérebro por meio das primeiras palavras cujas generalizações englobam outras palavras, tais como “mobília” (a classe que engloba vários objetos) ou “roupa” (camisa, bermuda etc.) (VYGOTSKY, 1986, p. 112 e 199). Embora nessa fase a criança já tenha superado parcialmente o seu egocentrismo e o pensamento já seja coerente e objetivo, as inter-relações nos complexos são “descobertas através da experiência” e são “mais concretas e factuais do que abstratas e lógicas”, de modo que ainda não estão hierarquicamente organizados e correspondem mais a “pré-conceitos” do que o que Vygotsky chama de “conceitos verdadeiros” (VYGOTSKY, 1986, p. 116, 198). Assim, a relação entre “flor” e “rosa” ainda não é uma relação de subordinação hierárquica e o conceito mais lato: “flor”, pode coexistir no mesmo plano que o conceito mais restrito: “rosa” (VYGOTSKY, 1986, p.

198). Por isso o autor afirma que um complexo "não é formado no plano do pensamento lógico abstrato", mas é "acima de tudo e principalmente, um agrupamento concreto de objetos ligados por nexos factuais" (p. 113) e, portanto, ainda não reflete as relações objetivas e hierárquicas que caracterizam o verdadeiro pensamento conceptual da terceira fase (p. 112 e 149).

Neste ponto torna-se oportuno traçar uma relação entre as diferentes visões do desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e do conceito de número proposto por Piaget e por Vygotsky. A fase do pensamento por complexos, na teoria de Vygotsky, corresponde às ideias das crianças em idade pré-escolar, ao nível pré-operatório, de Piaget (entre dois e seis ou sete anos) (VYGOTSKY, 1986, p. 202). O pensamento pré-operatório, de Piaget e Szeminska (1981, p. 12, apud NOGUEIRA, 2006, p. 140) representa o período pré-lógico em que a criança elabora gradualmente as relações de inclusão entre os objetos, formando hierarquia (das classes lógicas), bem como as relações assimétricas ou de ordem (seriação). Da mesma forma, os "complexos" de Vygotsky (1986) são relações de generalização entre as palavras que ainda "carecem de unidade lógica" (p. 113), mas cuja principal função "consiste em estabelecer ligações e relações" e dar "início à unificação das impressões dispersas; ao organizar elementos discretos da experiência em grupos cria uma base para futuras generalizações" (p. 135).

Na terceira fase da evolução do pensamento verbal, segundo Vygotsky, surgem os conceitos verdadeiros, ou pensamento conceitual, os quais são hierarquicamente organizados numa generalização que vai além da organização de elementos discretos da experiência e da unificação que caracteriza os complexos. O conceito verdadeiro implica necessariamente "abstrair, isolar elementos e ver os elementos abstraídos da totalidade da experiência concreta em que se encontram mergulhados", isto é, no pensamento conceitual "é tão importante unificar como separar: a síntese tem que combinar-se com a análise" (VYGOTSKY, 1986, p. 135).

Em suma, a afirmação de Vygotsky (1986, p. 139) de que "os complexos associativos pressupõem a existência de que se "abstrai" um traço comum de diferentes unidades", explicita inequivocamente que a generalização verbal dá origem ao conceito de classes. Portanto, a diferença fundamental entre ele e Piaget é que enquanto os processos pré-lógicos que, segundo este último, são baseados em esquemas sensório-motores representados em ações físicas e imagens mentais sobre o mundo dos objetos, para Vygotsky esses processos são baseados na linguagem, nos diferentes níveis de generalização e organização dos significados das palavras. Vygotsky (1986, p. 202) afirma textualmente que "as ideias das crianças em idade pré-escolar (que possuem a estrutura de complexos)" resultam "não do agrupamento de imagens dos objetos individuais, mas sim da elaboração de generalizações predominantes durante uma fase anterior", entendendo-se generalização aqui como um processo baseado nas palavras.

Na mesma linha de raciocínio, também depreendemos que enquanto para Piaget e Szeminska, (1981, p. 12, apud NOGUEIRA, 2006, p. 140-141) o conceito de número é produto da síntese da classificação e seriação dos objetos, Vygotsky (1986) reivindica que os conceitos genuínos surgem da abstração do pensamento por complexos, "quando os traços abstraídos são novamente sintetizados e a abstração sintetizada daí resultante se torna o principal instrumento de pensamento" (p. 139); isto é, o conceito de número origina-se quando "certos aspectos dos objetos foram abstraídos e generalizados em ideias de números" (p. 202). Vale enfatizar que em Vygotsky (1986), a generalização é dada através da palavra, de modo que a palavra desempenha o papel decisivo neste processo, sendo "utilizada deliberadamente para orientar todos os processos parciais do estádio superior da gênese dos conceitos" (p. 139), incluindo o de número (p. 202).

O ensino da matemática na visão de Vygotsky

O pensamento de Vygotsky sobre o ensino da matemática obviamente vai numa direção oposta ao de Piaget quando se trata do papel da linguagem na aquisição dos conceitos matemáticos. Diferentemente da visão piagetiana, em que os conceitos em diferentes estágios são sempre qualitativamente distintos e mutuamente antagônicos, resultando num processo de desenvolvimento descontínuo, Vygotsky (1986, p. 155-157) reivindica um processo contínuo e unitário, em que os novos conceitos se originam da elaboração de generalizações predominantes durante uma fase anterior (p. 202), de modo que a contagem e outros recursos simbólicos são de extrema importância no desenvolvimento do conceito de número e do ensino da matemática:

> O currículo não pode determinar com antecedência o ponto de viragem em que um princípio geral se torna claro para determinada criança. Não se ensina à criança o sistema decimal em si, ensina-se-lhe a escrever números, a somar e a multiplicar, a resolver problemas e de tudo isto acabam por emergir alguns dos conceitos gerais do sistema decimal. (VYGOTSKY, 1986, p. 185).

Embora Vygotsky (1986) afirme que "os novos e mais elevados conceitos, por seu turno, transformam o significado dos conceitos inferiores" (p. 202) ele também assume, contrapondo-se a Piaget, que "a criança não é obrigada a reestruturar separadamente todos os seus conceitos anteriores, coisa que seria realmente um trabalho de Sisifo." (p. 203). Assim, a progressão dos conceitos aritméticos básicos da criança para os conceitos algébricos dos adolescentes, que representam abstrações e generalizações de certos aspectos dos números e não dos objetos, realiza-se por meio da generalização das generalizações do período anterior (VYGOTSKY, 1986, p. 202). De acordo com Vygotsky (1986, p. 199-200), esse nível de "generalização de generalizações" caracteriza "os níveis mais altos no desenvolvimento do significado das palavras" e são governadas pela "lei de equivalência de conceitos, de acordo com a qual qualquer conceito pode ser formulado". Vygotsky cita como exemplo puro de equivalência os próprios "conceitos de números desenvolvidos através dos estudos de aritmética", de modo que "qualquer número poderá ser expresso de inúmeras maneiras" uma vez que cada número "contém em si as suas relações com todos os outros": o número um pode ser expresso como sendo, por exemplo, a diferença entre dois números consecutivos, ou como um número qualquer dividido por si próprio e assim por diante (VYGOTSKY, 1986, p. 200).

Concluímos, portanto, que o pensamento conceitual para Vygotsky é de natureza proposicional, também referida como semântica ou factual, isto é, mais baseada em descrições ou afirmações verbais. Ao distinguir entre conceitos espontâneos dos científicos, Vygotsky (1986, p. 205) cita que as respostas erradas das crianças, como quando "uma criança diz de um objeto que se dissolveu na água porque era pequeno, e de outro que se dissolveu porque era grande", reflete relações de generalidade pouco desenvolvidas, ainda não hierárquicas. Para Vygotsky, a criança na fase pré-operatória "limita-se a proferir afirmações empíricas de fatos que decorrem da lógica das percepções" porque no seu cérebro não há qualquer generalização do tipo "as dimensões reduzidas implicam a dissolução" e, por isso, ela não sente contradição em suas afirmações (VYGOTSKY, 1986, p. 205). Esta generalização de alto nível a que Vygotsky se refere se ajusta perfeitamente ao conceito de representação ou pensamento proposicional, no qual os conceitos são baseados em descrições de natureza mais verbal (GAZZANIGA; HEATHERTON, 2005, p. 25 e 254) e, portanto, mais consistente com matemática logicista e a lógica proposicional (simbólica) de Bertrand Russell (brevemente discutida no início deste capítulo).

Veremos que a noção do papel da linguagem na aquisição das habilidades numéricas e o conceito de número como uma rede de relações de "equivalência" são noções muito similares às concepções de número e matemática na teoria behaviorista e na ciência da Análise do Comportamento.

A análise do comportamento

A análise do comportamento é uma ciência cuja filosofia é o behaviorismo (ver CARVALHO NETO, 2002). Este surgiu como uma importante escola psicológica fundada pelo americano John B. Watson (1878-1958) sob forte influência do empirismo e também do trabalho do fisiologista russo Ivan P. Pavlov (1849-1936). Para Watson, uma psicologia verdadeiramente científica deveria estudar apenas comportamentos diretamente observáveis. O objetivo dessa ciência seria a predição e o controle do comportamento. Com base na teoria da evolução, ele admitia a continuidade filogenética entre outras espécies animais e o homem, sendo o comportamento humano, portanto, apenas parte do escopo de sua ciência. No que diz respeito à relação mente-corpo, não há interação entre eles, de modo que não há necessidade de explicá-la. O comportamento é determinado por estímulos antecedentes do ambiente, aí devendo ser buscadas as suas causas.

Outro behaviorista de grande destaque mundial no cenário da psicologia e sucessor de Watson foi Burrhus F. Skinner (1904-1990). É comum que parte significativa da literatura psicológica apresente Watson e

Skinner como se não houvesse diferenças fundamentais no pensamento de cada um. Na verdade, porém, trata-se de duas versões bastante diferentes do behaviorismo. Não é propósito do presente texto discuti-las exaustivamente, mas duas delas devem ser apontadas aqui. Matos (1997) afirma que Watson não negava a mente, mas se recusava a estudar comportamentos encobertos (pensamentos, sentimentos etc.), ao passo que Skinner negava definitivamente a existência de uma mente imaterial causadora do comportamento, tal como propunha Descartes, mas colocava como parte importante da psicologia o estudo dos comportamentos encobertos, aos quais não atribuía nenhuma natureza especial, sendo eles tão naturais como qualquer comportamento publicamente observável.

O modelo de Watson é o famigerado S-R (estímulo-resposta), isto é, o ambiente determina o comportamento sendo esta uma relação linear e unidirecional, ao passo que para Skinner, a ação do sujeito opera sobre o ambiente, modificando-o de várias formas. Tais modificações são consequências da ação do sujeito, as quais, por sua vez, retroagem sobre ele alterando a probabilidade de novas ocorrências futuras do comportamento que as produziu. Nas palavras do próprio Skinner (1978, p. 15), "os homens agem sobre o mundo, modificam-no e, por sua vez, são modificados pelas consequências de sua ação". Em termos educacionais, uma implicação importante é apontada por De Rose (2010, p. 10) a pesquisa sobre o comportamento deve concentrar-se na investigação das "relações entre o comportamento dos alunos, as condições antecedentes e as consequências comportamentais".

A formação dos conceitos matemáticos

De acordo com a definição skinneriana, o comportamento verbal é um tipo especial de operante "em que as consequências são mediadas pelo comportamento de outro(s) indivíduo(s)" (DE ROSE, 2010, p. 7). Skinner (1972, apud TEIXEIRA, 2010) reivindicou que desde o início as aquisições aritméticas são determinadas pelo comportamento verbal, quando a criança "fala e escreve certas palavras, algarismos e sinais que remetem a números e operações aritméticas", bem como quando "conta, diz a tabuada, conta enquanto assinala os elementos de um conjunto de objetos, responde a números ditos ou escritos" etc. "Tudo isso, para Skinner, constitui comportamento verbal" (TEIXEIRA, 2010, p. 161).

Essas colocações parecem sugerir que, para alguns autores, o comportamento matemático se inicia e se desenvolve a partir da linguagem, devendo ser avaliado por meio dela e nela devendo ser buscadas as raízes de suas dificuldades (TEIXEIRA, 2010, p. 173). Entretanto, uma análise mais detalhada da concepção de formação de conceitos e, particularmente, do conceito de número, sugere uma noção mais ampla, que nos permite concluir que, além do comportamento verbal, a discriminação sensório-perceptiva de quantidades desempenha um papel fundamental no comportamento numérico. De Rose (2010, p. 7), por exemplo, define o comportamento matemático como um tipo especialmente complexo de comportamento verbal sob controle discriminativo de aspectos quantitativos e numéricos do ambiente. De fato, de acordo com Keller e Schoenfeld (1974), a aprendizagem de conceitos depende de dois processos distintos, porém, complementares: discriminação interclasses e generalização intraclasse. A discriminação estabelece a diferença entre estímulos de classes distintas, ao passo que a generalização permite o agrupamento de estímulos de uma mesma classe por propriedades que têm em comum. Drachenberg (2010) aplica essa mesma definição à aprendizagem de conceitos de quantidades (ver também MAGALHÃES; GALVÃO, 2010, p. 96).

Nessa perspectiva, o comportamento matemático faz parte de um tipo de comportamento verbal dos mais importantes, isto é, aquele controlado "discriminativamente por objetos, eventos ou propriedades do ambiente", de modo que as palavras e sentenças, sob controle desses aspectos do ambiente podem ser tomadas como descrições simbólicas deles (DE ROSE, 2010, p. 7). A Análise do Comportamento tem avançado significativamente, desde o início da década de 1970, no estudo do comportamento simbólico, em grande parte graças à adoção, entre vários recursos teórico-metodológicos, do chamado paradigma de equivalência. Este evoluiu a partir de um influente relato de pesquisa apresentado por Sidman (1971), resumido a seguir.

Sidman (1971) estudou um rapaz com microcefalia e um severo atraso de desenvolvimento e de linguagem. Usando um conjunto de 20 palavras faladas correspondentes a objetos, suas respectivas figuras e palavras impressas, Sidman verificou que o rapaz sabia nomear algumas figuras e selecioná-las a partir de seus nomes falados pelo experimentador. Por meio de um procedimento de escolha de acordo com o modelo (MTS) e reforçamento de escolhas corretas, o rapaz foi ensinado a selecionar palavras escritas quando seus nomes eram ditados. Posteriormente, Sidman verificou que, além de aprender as relações palavra oral - palavra escrita diretamente ensinadas, o rapaz "generalizou" esse aprendizado e foi capaz de selecionar palavras escritas correspondentes às suas respectivas figuras, de selecionar figuras correspondentes a palavras escritas e de ler as palavras em voz alta (SIDMAN, 1971). Ou seja, a emergência de relações não ensinadas diretamente, implica um tipo de "comportamento novo" (isto é, que emerge sem nunca ter sido reforçado diretamente) e representa uma importante implicação para noção de "cognição" (PRADO, 2010, p. 275). Essa publicação de Sidman (1971) foi de importância ímpar para a Análise do Comportamento, alterando e ampliando o seu escopo teórico-metodológico e sua visão sobre o comportamento humano, pois abriu a possibilidade de desenvolvimento de uma análise comportamental da cognição (DE ROSE, 1993). Ademais, a pesquisa sobre a equivalência de estímulos foi sumamente importante ao lançar luzes sobre as questões do papel da linguagem na aquisição do conhecimento e do comportamento matemático, isto é, no debate "sobre se nossa capacidade para formar classes de equivalência é um processo comportamental básico que possibilita o desenvolvimento da linguagem" ou "se, ao contrário, a linguagem é que torna possíveis as relações de equivalência" (PRADO, 2010, p. 275).

O paradigma de equivalência e o conceito de número

Na seção anterior enfatizamos que o papel do controle discriminativo no comportamento verbal implica, necessariamente, em mecanismos sensório-perceptivos auditivos e visuais. O comportamento numérico ou matemático constitui-se, pois, de respostas verbais como, "dois", "três", "muitos", "poucos", "mais", "menos", "metade", "o dobro" etc., sob controle de propriedades quantitativas ou numéricas de estímulos do ambiente. Em contrapartida, a palavra (linguagem) substitui propriedades quantitativas contínuas (volume, massa, comprimento etc.) ou discretas (números) de estímulos ou eventos, permitindo ao falante colocar o ouvinte em contato com propriedades do ambiente, às quais ele pode não ter acesso num determinado momento (DE ROSE, 2010).

Nessa perspectiva, podemos dizer que "a compreensão numérica implica que nomes de números falados, numerais impressos e quantidades correspondentes de itens sejam tratados como equivalentes" (GREEN, 2010, p. 49), isto é, estímulos que se tornam substituíveis uns pelos outros por meio do estabelecimento de relações arbitrárias que formam "classes de estímulos equivalentes" (ROSSIT; GUALBERTO, 2010, p. 176; PRADO, 2010, p. 274). Uma vez que o comportamento numérico envolve relações arbitrárias de equivalência entre conceitos verbais e quantidades, e este termo refere-se a propriedades sensório-perceptivas de coleções de objetos, fica claro que a aquisição do conceito de número não depende somente da linguagem, mas também das capacidades sensório-perceptivas do indivíduo para discriminar coleções de objetos com base somente nos seus atributos numéricos, independente de sua nomeação ou rótulos verbais.

É nesse sentido que, em minha opinião, assim como na de outros autores, como Prado (2010), a Análise do Comportamento pode contribuir significativamente para esclarecer o papel da linguagem na formação do conceito de número, isto é, se o conceito de número é, de fato, determinado pela linguagem ou, ao contrário, depende fundamentalmente de capacidades não verbais como a discriminação sensório-perceptiva dos atributos numéricos (coleções) dos objetos.

Em 1993, Green publicou um trabalho (GREEN, 2010, p. 49) relatando uma pesquisa em que investigou a questão matemática-linguagem usando o procedimento MTS. Embora Green (2010, p. 49) assumisse que a compreensão numérica implica na equivalência entre nomes de números falados, numerais impressos e quantidades correspondentes de itens, ela investigou especificamente se a contagem realmente exercia um papel determinante na compreensão numérica. Seu estudo contou com a participação de dois jovens. Um de 15 anos, classificado como autista e com severos prejuízos linguísticos e outro de 13 anos, cuja idade mental foi estimada em três anos e um mês, apresentando prejuízos na compreensão e produção da linguagem. Ao serem pré-testados em todas as relações condicionais do experimento, Green observou que somente as relações entre nomes de números ditados (estímulos modelos) e os numerais impressos de 1 a 6 (estímulos de comparação) apresentavam-se no repertório de ambos os alunos, embora Mike conseguisse emparelhar (relacionar) as quantidades um, dois e três a seus nomes ditados e numerais impressos. Então, os sujeitos foram treinados nas relações ditado-numeral e número ditado-conjunto, com os numerais e quantidades (conjuntos formados por pequenos círculos pretos sólidos arranjados em três padrões espaciais diferentes) de 1 a 6. Ao final do pós-teste os sujeitos apresentaram repertórios emergentes e generalizaram o treino para relações como oralizar os números na presença tanto dos respectivos numerais quanto dos conjuntos, bem como relacionar numerais a conjuntos e vice-versa mesmo quando usadas figuras diferentes das treinadas, tais como moedas, casas e cavalos. Green concluiu que uma vez que somente as relações entre nomes de números ditados e numerais impressos de 1 a 6 estavam no repertório desses jovens no pré-teste, "a contagem não pareceu ser necessária para a aprendizagem das equivalências número/quantidade." (p. 63).

Empregando procedimentos semelhantes ao de Green (2010), Prado (2001) investigou a formação de relações de equivalência em crianças pré-escolares usando como estímulos numerais ditados e impressos e conjuntos numéricos (coleções de figuras) que variavam em disposição espacial, tamanho, forma e quantidade. Em contraste com o estudo de Green, cujos participantes não contavam, os pré-escolares de Prado (2001) já eram hábeis contadores desde seu ingresso na pesquisa, mas não se saíam tão bem com os numerais. Após ensinadas a nomear e a ordenar os numerais do menor para o maior, essas crianças exibiram relações entre numerais e conjuntos (entre outros desempenhos) durantes os testes, mas não usaram a contagem em nenhuma dessas tarefas. Esses dados são consistentes com os achados de Green, bem como com a conclusão de que a contagem não parece imprescindível para a formação de equivalência numeral-quantidade.

Mix (1999, ver também PRADO et al., 2006), conduziu um estudo com 88 crianças de dois anos e meio a quatro anos e meio de idade, no qual administrou uma tarefa de equiparação de conjuntos (usando o procedimento MTS) e duas tarefas de contagem. Na primeira, os elementos eram dispostos linearmente, controlando-se o comprimento e a densidade das fileiras. Também foi manipulada a dimensão perceptivo-categorial dos elementos, de modo que fosse possível observar sua influência sobre as respostas: em alguns casos, os elementos dos conjuntos modelo e de comparação eram os mesmos, em outros eram diferentes e, em outros ainda, os elementos diferiam entre si dentro dos conjuntos. Quanto às tarefas de contagem, em uma a criança respondia à pergunta "quantos são?" dado um conjunto de 10 itens dispostos linearmente. Em outra, denominada "dê um número", a criança deveria separar, de um conjunto de 15 itens, uma quantidade de itens especificados pelo examinador. Resumidamente, Mix encontrou que a partir dos três anos e meio as crianças desempenharam significativamente acima do acaso na tarefa de equiparação de conjuntos, mesmo quando os elementos do conjunto modelo diferiam dos conjuntos de comparação, sugerindo abstração da dimensão numérica. A partir dos quatro anos e meio as crianças também desempenharam significantemente bem na equiparação de conjuntos, mesmo quando os elementos diferiam dentro dos conjuntos. Entretanto, vale ressaltar que as crianças mais velhas tiveram desempenhos superiores tanto nas tarefas de equiparação de conjuntos quanto nas tarefas de contagem, sendo que ambas as tarefas se correlacionaram positivamente.

Recentemente, Prado et al. (2006) conduziram um estudo com 17 crianças com idade entre quatro anos e oito meses e seis anos e cinco meses usando as mesmas tarefas ministradas por Mix (1999), com algumas diferenças. Na tarefa de equiparação de conjuntos, os elementos do conjunto modelo sempre foram iguais aos dos conjuntos de comparação, sendo sua distribuição espacial aleatória. Outra diferença foi que Prado et al. (2006) usaram quantidades de 5 a 8 para evitar escolhas por subitização[2] (SPELKE, 2003; HAUSER; SPELKE, 2004; veja ANDRADE, 2006a, 2006b). A habilidade de contagem foi analisada por meio de duas tarefas. Na de "contagem de conjuntos totais" a criança tinha de contar as figuras e dizer quantas eram (aplicação da regra de cardinalidade). Na tarefa de "contagem de subconjuntos", a criança tinha de separar, de um conjunto de 17 figuras, um número de (5 a 8) elementos indicados. Nos próximos parágrafos apresentaremos algumas observações a respeito da tarefa "conta-

[2] O termo *subitização* tem sido empregado para se referir à apreensão numérica súbita, pré-atencional e inconsciente, de numerosidades de 1 a 3 ou 4 elementos, sem o emprego da contagem. Essa capacidade tem sido amplamente demonstrada em adultos e bebês humanos, bem como em animais não humanos.

gem de subconjuntos" utilizada por Prado et al. (2006), em função de sua importância para a interpretação que faremos de seus resultados.

Separar corretamente subconjuntos de um conjunto maior de acordo com um número determinado pelo experimentador (contagem de subconjuntos) é uma medida específica da habilidade de contagem porque requer o domínio dos três princípios básicos da contagem: a) a correspondência um-a-um ou biunívoca (cada palavra-número deve corresponder a somente um objeto da coleção); b) a ordem estável ou sequência invariável das palavras-número; c) a regra da cardinalidade, em que a última palavra da contagem determina a quantidade de elementos do conjunto. A tarefa "contagem de subconjuntos" é necessária numa investigação como essa porque a resposta correta à pergunta "quantos têm?", na tarefa "contagem de conjuntos totais", nem sempre indica necessariamente que a criança usou um procedimento correto de contagem, nem que ela realmente possui o conceito de cardinalidade. Fuson (1988) mostrou que quando as crianças novas começam a contar pela primeira vez, o final da contagem não possui necessariamente um significado cardinal, pois pode ser simplesmente uma imitação da atividade sociocultural da contagem. Ao serem perguntadas sobre "quantos há?", após a sua contagem, muitas delas recontam e continuam a recontar cada vez que recebem a mesma pergunta; muitas crianças que respondem à pergunta "quantos há?" simplesmente dão o último número da contagem como resposta mesmo quando sua contagem é muito incorreta (repetindo e/ou pulando números) e o último número falado não corresponde à cardinalidade correta. Este comportamento sugere que a criança simplesmente construiu uma espécie de "regra da última palavra".

No estudo de Prado et al. (2006), a tarefa principal na medição das habilidades numéricas é a equiparação de conjuntos, a qual apresenta um maior grau de complexidade comparada às duas tarefas de contagem, porque a criança tem de contar os elementos de ambos os conjuntos, modelo e de comparação, na mesma tarefa e guardar os resultados na memória de trabalho verbal para decidir se a quantidade era a mesma ou não. Consistentemente com os estudos anteriores de Green (2010) e Mix (1999), algumas crianças do estudo de Prado et al. (2006) não recorreram consistentemente à contagem, mas ainda assim apresentaram escores elevados de escolha da alternativa correta na equiparação de conjuntos.

Adicionalmente, Prado e seus colegas não encontraram correlação significante entre nenhuma das tarefas de contagem (de conjuntos totais e de subconjuntos) e a de equiparação de conjuntos. Além disso, esta ausência de correlação entre as habilidades de contagem e o desempenho na tarefa de equiparação de conjuntos não pode ser explicada pela idade, uma vez que não houve correlação entre a idade das crianças nem com a contagem de subconjuntos, nem tampouco com a equiparação de conjuntos.

Entretanto esses resultados encontrados por Prado et al. (2006) não significam que a contagem não tenha importância nas habilidades numéricas, uma vez que a performance na contagem dentro das tarefas de contagem de conjuntos totais e equiparação de conjuntos (isto é, como um componente indispensável à sua realização) se correlacionou com o desempenho nessas tarefas. Em outras palavras, Prado et al. (2006) obtiveram uma correlação muito significante entre o contar e o dizer quantos na tarefa de conjuntos totais, assim como correlações muito significantes entre as contagens do conjunto modelo e o de comparação, tanto entre si quanto de ambas com a escolha do estímulo de comparação correto. Ademais, observou-se que as crianças que não se utilizaram da contagem na escolha do conjunto de comparação apresentaram, em geral, escores mais baixos do que aquelas que contaram.

Implicações teórico-empíricas dos achados com o paradigma da equivalência

Indivíduos com sérios prejuízos na linguagem são capazes de generalizar o treino nas relações ditado-numeral e número ditado-conjunto com quantidades de 1 a 6, e pronunciar o número correto na presença de distintos arranjos numéricos de 1 a 6, sem uso dos recursos da contagem (GREEN, 2010). Crianças ainda em idade pré-escolar e tão novas quanto três anos de idade já são capazes de discriminar aspectos genuinamente numéricos do ambiente e identificar, discriminar e fazer relações simbólicas com numerosidades até 4 ou 5 elementos, muito anteriormente à aquisição plena das habilidades de contagem (MIX, 1999; PRADO et al., 2006). Por outro lado, as operações numéricas envolvendo numerosidades não subitizáveis, acima de quatro elementos, parecem depender crucialmente da contagem (PRADO, 2010; veja ANDRADE 2006a). Os estudos de Fuson (1988) e Wynn (1990; 1992b) mostraram inequivocamente que crianças de três a cinco anos já são capazes de contar e aplicar os princípios básicos da contagem a arranjos numéricos pequenos até quatro elementos.

Essas evidências apontam no sentido oposto à reivindicação de Vygotksy de que a linguagem é que dá origem aos conceitos, incluindo o conceito de número, e à de Piaget de que o conceito de número é resultante de um longo processo de desenvolvimento que culmina com a síntese da classificação e seriação por volta dos seis ou sete anos de idade. Entretanto, os estudos analítico-comportamentais aqui reportados convergem parcialmente para a noção piagetiana ao mostrarem que o conceito inicial de número se baseia primordialmente em processos sensório-perceptivos e, ao mesmo tempo, suportam, também parcialmente, a visão vygotskyana ao mostrarem que as habilidades numéricas mais sofisticadas dependem de recursos linguísticos, a começar pela contagem e estendendo-se à simbologia matemática.

Portanto, as evidências convergem para a noção de que o comportamento matemático não deve ser visto essencialmente como comportamento verbal, mas sim como um comportamento complexo que depende tanto de mecanismos sensório-perceptivos não verbais para o processamento dos aspectos numéricos do ambiente, quanto de mecanismos verbais da contagem. Essa noção que aqui propomos é consistente com a noção de que o conceito de número é apenas um aspecto da formação de conceitos em geral, que depende de dois processos comportamentais básicos: a discriminação e a generalização (DRACHENBERG, 2010; KELLER; SCHOENFELD, 1974; MAGALHÃES; GALVÃO, 2010).

Nesse sentido, a definição de De Rose (2010, p. 7), segundo a qual o comportamento matemático é um tipo especialmente complexo de comportamento verbal discriminativamente controlado por aspectos quantitativos e numéricos do ambiente, se aplica adequadamente somente a um aspecto do comportamento matemático, qual seja, o seu componente verbal, de modo que o termo “comportamento matemático” deveria, neste caso, ser substituído pelo termo “comportamento verbal matemático” — a linguagem matemática que começa nas palavras-número e nos princípios da contagem. Uma vez que o comportamento matemático a que se refere De Rose (2010) é controlado por um componente não verbal, mais especificamente pelos processos sensório-perceptivos subjacentes à discriminação dos aspectos numéricos do ambiente, esse componente sensório-perceptivo antecede o comportamento verbal relacionado à matemática e, portanto, deve ser visto como o ponto de partida fundamental do comportamento matemático. Em outras palavras, para aprendermos a dar as respostas verbais corretas a arranjos numéricos distintos, como dizer "dois" diante de um arranjo de dois elementos e "três" diante de um arranjo de três elementos, antes de tudo precisamos ser capazes de perceber e discriminar os atributos sensório-perceptivos numéricos desses estímulos; por outro lado, para dar a resposta verbal correta a arranjos numéricos grandes, além da percepção numérica necessitamos também da contagem.

As investigações mais recentes da psicologia cognitiva e da neuropsicologia e neurociência cognitiva são altamente consistentes com os achados empíricos da análise do comportamento aqui reportados. Hoje há um crescente consenso de que as representações numéricas nos adultos e o pensamento matemático culturalmente construído dependem da interação entre um senso inato de magnitudes numéricas, chamado de "senso numérico" (DEHAENE, 1997), presente em bebês desde tenra idade (DEHAENE, DEHAENE-LAMBERTZ, COHEN, 1998; para uma revisão em português veja ANDRADE, 2006a, 2006b), com a linguagem (WYNN, 1992a; CAREY, 2004; GELMAN; BUTTERWORTH, 2005; SPELKE, 2003; ANDRADE, 2006a). O senso numérico hoje é visto como constituído de dois mecanismos não verbais de percepção genuinamente numérica, um sistema exato para numerosidades pequenas ou subitizáveis, até quatro elementos e um sistema aproximado para numerosidades maiores (CAREY, 2004; FEIGENSON, DEHAENE; SPELKE, 2004).

É sobre essas concepções baseadas nas mais recentes e modernas investigações empíricas sobre a natureza dos sistemas cognitivos subjacentes ao comportamento numérico, as quais são prevalentes na atual psicologia experimental, que vamos nos debruçar nas próximas sessões.

Paradigmas teórico-empíricos da psicologia e neurociência cognitivas

Conforme exposto em citação anterior, Piaget comparou o primeiro ano de vida a um abismo de mistérios, sendo a observação do comportamento do bebê o meio para a descoberta do que se passa em sua mente. A moderna psicologia experimental vem, pois, trabalhando há décadas para descobrir, pelo menos em parte, o que acontece na mente dos bebês através do estudo detalhado e controlado de seu comportamento.

Desde meados da década de 60 sabe-se da existência do "reflexo de orientação" (FANTZ, 1964): a resposta de olhar preferencialmente para estímulos novos do que para estímulos familiares, observada em bebês humanos e, portanto, considerada inata. O olhar preferencial é o que fundamenta o *procedimento de habituação-desabituação.* Inicialmente, mostra-se um determinado estímulo (como uma foto, boneco etc.) repetidas vezes ao bebê, até que ele fique literalmente entediado, o que será indicado por uma sensível diminuição de seu tempo de olhar. Quando isso ocorre, diz-se que houve "habituação". Um novo estímulo é então apresentado, no qual há diferenças em relação o anterior, tais como forma, cor, quantidade etc. Se o bebê olhar mais tempo para o estímulo novo, significa que houve "desabituação", ou seja, ele discriminou as diferenças. A manipulação de atributos ou dimensões diversas de estímulo possibilita avaliar se o bebê é ou não capaz de discriminá-los. Graças ao método de habituação e outras novas técnicas de investigação, as três últimas décadas têm presenciado evidências notáveis de capacidades muito precoces até mesmo em neonatos. Hoje sabemos que os bebês possuem uma percepção muito precoce de numerosidade (WYNN, 1992a; HAUSER; SPELKE, 2004), do comportamento dos objetos no espaço e do próprio espaço (SPELKE, 2003), bem como dos sons linguísticos (KUHL, 2004) e de padrões musicais (ANDRADE, 2004) (para uma revisão veja ANDRADE; PRADO, 2003; ANDRADE 2006a, 2006b; PRADO, 2010).

O estudo clássico de Karen Wynn: a aritmética dos bebês

Em 1992, Karen Wynn publicou o relato de um dos mais importantes experimentos sobre a numerosidade em bebês. Ela usou o procedimento de habituação, com modificações, em que bebês de cinco meses de idade viam um ou dois bonecos expostos num palco de fantoches. (WYNN, 1992a). Depois, um anteparo se levantava cobrindo parcialmente a cena. Um boneco era introduzido ou removido, sempre de modo bem visível à criança, contudo, permanecendo oculto o resultado da adição ou subtração. Finalmente, o anteparo era baixado, revelando resultados corretos (por exemplo: 2 + 1 = 3; 2 – 1 = 1) ou incorretos (1 + 1 = 1; 2 – 1 = 2). Para produzir resultados incorretos, um experimentador escondido atrás do palco retirava um boneco por um fundo falso. Assim, os testes de adição e subtração de Wynn sempre consistiam de um par de eventos numéricos, havendo dois tipos de par: o par correto (operação → resultado correto) e o par incorreto (operação → resultado incorreto). Assim, cada operação (adição ou subtração) foi testada sempre alternando um par correto com um incorreto (ou vice-versa), repetindo-se três vezes cada par, de modo a perfazer um total de seis pares de eventos numéricos para cada operação. Note que os bebês assistiam somente a dois resultados diferentes. Os bebês olharam por mais tempo para os resultados "incorretos", com uma diferença estatisticamente significante ao longo de todos os blocos de teste tanto no começo quanto no fim do experimento. Porém**,** os bebês falharam com arranjos numéricos acima de três objetos, tais como 2 *versus* 4, 3 *versus* 4 e 3 *versus* 6.

O estudo clássico de Cohen e Marks: falseando o estudo de Wynn

Alguns pesquisadores levantaram a possibilidade de que, em vez de estarem discriminando os arranjos com base na numerosidade, os bebês poderiam estar simplesmente esboçando uma preferência pela familiaridade sensório-perceptiva geral dos arranjos acoplada a uma preferência para olhar para onde há mais objetos (COHEN; MARKS, 2002). A discussão desse estudo é importante, mesmo ao custo de alongar um pouco mais o capítulo, pois ele consiste no principal, senão o único, estudo empírico de que temos conhecimento, que se dedicou a falsear, de forma elegante e interessante os resultados de Wynn (1992a).

No primeiro experimento de Cohen e Marks (2002), bebês de cinco meses de idade viram uma série de somente dois tipos de operações, "1 + 1" e "2 – 1". Mas, diferentemente do estudo de Wynn (1992b), em que os bebês viam uma alternância de somente dois tipos de resultados diferentes (correto ou incorreto) para cada operação, os bebês de Cohen e Marks (2002) viam quatro resultados diferentes (isto é, a apresentação de 0, 1, 2 ou 3 objetos) para cada operação em duas repetições de cada resultado (diferentemente de Wynn, 1992, em que cada resultado tinha três repetições) perfazendo, assim, um total de oito pares de eventos numéricos e, portanto, seis incorretos e apenas dois corretos. Apesar dessas diferenças metodológicas, os bebês ainda mostraram o mesmo padrão de resultados obtidos por Wynn (1992a) – olhar por mais tempo para o resultado incorreto 1 no grupo da adição “1 + 1” e para o 2 no grupo da subtração “2 - 1” no primeiro bloco de testes. Entretanto, não mostraram preferência pelo resultado incorreto 3 em todos os blocos. Em suma, ao longo de todo o primeiro experimento os bebês de Cohen e Marks (2002) olharam por mais tempo, não para todos os resultados incorretos, mas preferiram os resultados de exibição idêntica à exibição inicial (i.e. a um objeto na série “1 + 1”, a dois objetos na série “2 – 1”) em lugar dos resultados diferentes da apresentação inicial. Portanto, Cohen e Marks (2002) argumentaram que o maior tempo do olhar aos resultados aritméticos incorretos no experimento de Wynn (1992a) poderia ser explicado pela preferência pela familiaridade da apresentação inicial. Num terceiro experimento, Cohen e Marks (2002) mostraram aos bebês eventos de “mudança de número”, mas sem nenhuma operação aritmética, nos quais os bebês viam tanto um quanto dois objetos serem escondidos por uma tela, cuja remoção alguns segundos depois podia revelar 0, ou 1, 2 ou 3 itens. Aqui, os bebês novamente olharam por mais tempo para o resultado possível, no qual o número revelado era o mesmo que o do *display* inicial, do que eles olharam para o número (impossivelmente) mudado.

Entretanto, a hipótese da familiaridade levantada com base nesses dois experimentos de Cohen e Marks (2002) não explica porque os bebês de Wynn (1992a) também olharam por mais tempo para o resultado incorreto 3, após a operação “1 + 1”, além do resultado incorreto 1. Num segundo experimento, Cohen e Marks (2002) tentaram mostrar que a preferência por 3 após a operação “1 + 1” poderia ser explicada pela preferência por arranjos maiores e apresentaram diferentes arranjos de 0, 1, 2 ou 3 itens sem qualquer operação aritmética prévia para os bebês simplesmente olharem para eles. Entretanto, no primeiro bloco os bebês olharam por mais tempo para 2 do que para 3 itens e a tendência de olharem mais tempo para arranjos maiores começou a ocorrer somente no segundo bloco de tentativas. Mas, ainda assim, Cohen e Marks usaram os dados deste segundo experimento como evidência de que na adição “1 + 1” do estudo de Wynn (1992a) os bebês olharam por mais tempo para o resultado incorreto 3 do que no resultado correto devido a uma preferência para números maiores e não porque tinham gerado uma expectativa de que o resultado seria 2.

De fato, a hipótese da preferência por quantidades maiores cai por terra se levarmos em conta, primeiramente, que no experimento 1 de Cohen e Marks (2002), os bebês não olharam significativamente por mais tempo o par incorreto “1 + 1 = 3” do que para o par correto “1 + 1 = 2” e, em segundo lugar, que a preferência por números maiores no segundo não emergiu antes de suas quatro primeiras tentativas.

Cohen e Marks (2002) tinham uma hipótese dual, qual seja, a de que dois fatores não numéricos, a saber, a preferência pela familiaridade e pelos arranjos maiores, poderiam explicar os resultados de Wynn (1992a). Contudo, além de os seus resultados não serem satisfatoriamente consistentes com ela, eles também não conseguiram demonstrar que as operações de adição e subtração não fazem diferença no paradigma padrão, em que há somente dois resultados ao invés de quatro (CAREY, 2002). Em outras palavras, além de por um lado Cohen e Marks (2002) não terem produzido evidências consistentes com sua hipótese dual, por outro eles também não replicaram os resultados de Wynn (1992a) em razão do tipo de manipulação que introduziram em importantes parâmetros experimentais, conforme descrito acima.

De fato, Cohen e Marks empregaram desvios metodológicos significativos com relação ao estudo original de Wynn (1992b). A autora argumenta (WYNN, 2002) que o método utilizado por Cohen e Marks não representa o paradigma experimental padrão de “violação de expectativa”, no qual equilibram-se os resultados corretos e incorretos, mas sim um paradigma no qual, além do excesso de resultados diferentes – e, portanto, um excesso de escolhas possíveis – há um grande desequilíbrio entre eventos impossíveis e possíveis, com 75% das tentativas representando resultados impossíveis, em contraste com o experimento de Wynn (1992a), em que houve 50% de eventos possíveis e 50% de impossíveis. Essas diferenças podem introduzir vieses, pois a sobrecarga de informações com um excesso de possibilidades de escolha pode aumentar a demanda de atenção dos bebês para características perceptivas superficiais, em detrimento das diferenças conceituais, cuja detecção requer processos inferenciais (WYNN, 2002; CAREY, 2002). Além do excesso de informações fornecidas, o delineamento experimental de Cohen e Marks (2002) apresenta de modo desequilibrado os eventos impossíveis e os possíveis – 75% e 25%, respectivamente – o que, somado aos outros fatores apontados, pode levar os bebês a aprenderem rapidamente a “esperar o inesperado”, ou que qualquer resultado é “possível” nesse contexto experimental (WYNN, 2002, p. 208).

Para finalizar, cabe destacar que as descobertas de Wynn (1992a) geraram muitas replicações e extensões importantes, bem como novos paradigmas experimentais, cujos resultados descartam definitivamente a hipótese opcional da preferência pela familiaridade.

Evidências do senso numérico em bebês e de sua natureza supramodal

O desenvolvimento de novas técnicas experimentais tem possibilitado a produção de abundantes evidências sobre a representação mental de objetos ocultos (noção de permanência do objeto) e seus atributos numéricos em bebês pré-verbais, as quais incluem recursos para o controle de eventuais efeitos de preferência pela familiaridade sensório-perceptiva. Vejamos alguns exemplos.

Simon, Hespos e Rochat (1995) mostraram que bebês podem responder a transformações numéricas de objetos na tarefa de Wynn (1992a), mesmo quando as características desses objetos são modificadas atrás do anteparo, portanto, fora de suas vistas, por exemplo, a substituição de um boneco por outro diferente. Isso mostra que os bebês se basearam nas diferenças numéricas e não em outras propriedades como forma, cor, etc.

Koechlin, Dehaene e Mehler (1997) replicaram os mesmos resultados de Wynn (1992a) mostrando que os bebês respondiam ao número mesmo quando os objetos ocluídos se moviam em uma base giratória, tornando sua localização variável e imprevisível, indicando, assim, que os bebês responderam às diferenças numéricas e não à localização dos objetos e, consequentemente, não à familiaridade sensório-perceptiva.

Aguiar e Baillargeon (1999) realizaram um estudo com palcos separados, no qual as preferências por familiaridade foram totalmente controladas e ainda assim bebês de apenas dois meses e meio distinguiram entre eventos com um e dois objetos e olharam mais tempo para resultados incorretos e não para os arranjos perceptivos familiares. Da mesma forma, bebês de seis a oito meses de idade distinguem a numerosidade não somente de objetos, mas também de eventos ou ações, como a mudança no número de saltos de um fantoche (WYNN, 1996). Portanto, a discriminação dos atributos numéricos de eventos ou ações é de difícil conciliação com a hipótese de preferência pela familiaridade, de Cohen e Marks (2002).

Os bebês também são sensíveis à numerosidade contida nas informações auditivas e, mais do que isso, são capazes de integrar informações numéricas nas modalidades visual e auditiva. Starkey, Spelke e Gelman (1990) mostraram a bebês slides com 2 ou 3 objetos simultaneamente a 2 ou 3 sons de batidas em tambor. Ao ouvirem duas batidas os bebês olham por mais tempo para o slide com 2 objetos e, da mesma forma, ao ouvirem 3 batidas eles olham por mais tempo para os slides contendo 3 objetos. Conclui-se que bebês de seis a oito meses podem parear objetos e sons e relacionarem a numerosidade contida em informações de modalidades sensoriais diferentes. Mais recentemente, Kobayashi et al. (2004) replicaram as operações de Wynn (1992a) envolvendo objetos acústicos e visuais. Bebês de cinco meses entendem que a adição de 1 objeto visual + 1 tom é igual a 2 objetos (ou eventos) e, da mesma forma, esperam que 1 objeto visual + 2 tons é igual a 3 objetos, bem como 2 objetos visuais + 1 tom também é igual a 3 objetos. A capacidade de reconhecer operações aritméticas básicas com estímulos de diferentes modalidades sensoriais indica fortemente que esta capacidade numérica não é o reflexo de uma simples tendência de preferir arranjos sensoriais e perceptivos gerais familiares ou mais complexos e, além disso, também indica que a percepção numérica é de natureza supramodal.

Huntley-Fenner, Carey e Solimando (2002) empregaram o mesmo procedimento de Wynn (1992a), com modificações. Foram usados três tipos de estímulos: dois objetos coesos, sendo um rígido e outro flexível (uma substância gelatinosa) e areia (objeto não coeso). Os objetos coesos foram confeccionados de modo a terem a mesma aparência de uma porção de areia. As crianças puderam manipular todos os estímulos antes do início da fase de testes. Após a manipulação dos estímulos experimentais pelas crianças, eles foram mostrados a elas sendo introduzidos no palco. A introdução foi feita de cima para baixo, com uma pausa a meio caminho. O objeto rígido foi introduzido pendurado por um barbante, o flexível pela mão de um experimentador e a areia foi despejada a partir de um recipiente transparente. Na fase de testes, finalmente, a introdução de um objeto ou porção de areia somava-se ao que já estava inicialmente presente no palco, de modo semelhante à descrição do experimento de Wynn (1992a). O resultado dessa operação de soma podia ser possível ou impossível. Os resultados impossíveis consistiam da manutenção numérica dos estímulos inicialmente presentes no palco, cena com a qual a criança já havia sido familiarizada. De acordo com a hipótese da familiaridade, de Cohen e Marks (2002), os bebês deveriam olhar mais tempo para os resultados incorretos, fosse a operação feita com objetos coesos ou com areia. No entanto, os resultados da pesquisa revelaram que os bebês olharam consistentemente por mais tempo para os resultados impossíveis nas adições de objetos coesos, mas não para os eventos impossíveis com porções de areia. Isso mostra, de maneira contundente, que esse comportamento não reflete uma preferência pela familiaridade, mas antes, muito provavelmente pela numerosidade.

Um fato importante no estudo de Huntley-Fenner, Carey e Solimando (2002) é que os bebês falharam em representar uma porção de areia como um indivíduo particular que possa ser rastreado no tempo e no espaço. Mas eles foram bem-sucedidos com objetos coesos. De fato a coesão é usada por todas as culturas para distinguir não somente entre objetos individuais e coleções de objetos, mas também para distinguir objetos de substâncias não coesas ou não sólidas, como areia e água. Essa distinção se reflete nos sistemas nominais de muitas línguas do mundo, marcando a distinção entre entidades que podem ser diretamente contadas de entidades não contáveis (HUNTLEY-FENNER; CAREY; SOLIMANDO, 2002). Por exemplo, nós podemos dizer: "três cães", porque o substantivo "cão" se refere a um objeto individual e coeso e, portanto, contável. Mas não podemos dizer: "uma areia" ou "três águas", a não ser que estes "nomes de massa" sejam acompanhados de palavras de medida ou classificadoras, tais como "dois montes de areia" ou "dois copos d'água" (CAREY, 1997; HUNTLEY-FENNER; CAREY; SOLIMANDO, 2002).

De fato, os adultos parecem construir naturalmente o conceito de que materiais como areia e água não são indivíduos ou entidades não--individuadas. Carey (1997) nota que todas as línguas marcam a distinção gramatical entre objetos individuáveis e objetos não individuáveis, apesar da variação entre as línguas quanto às entidades contempladas por essa distinção gramatical. Por exemplo, há línguas que individuam somente pessoas, línguas que individuam também animais e objetos inanimados e línguas, como a portuguesa e a inglesa, que incluem na sua individuação quaisquer estruturas complexas que possam ser rastreadas no tempo e no espaço como um todo coeso e coerente, bem como entidades abstratas (como um "cochilo" ou "uma opinião") (CAREY, 1997).

Portanto, a pesquisa sobre as capacidades numéricas em bebês ainda muito novos revela a permanência do objeto muito antes do que previa a teoria piagetiana. Além disso, estes estudos mostram claramente que objetos coesos possuem um *status* privilegiado em relação aos objetos não coesos em um sistema neurocomputacional capaz de estabelecer representações de indivíduos (individuação) e de seu rastreamento no tempo e no espaço que parece ser, de fato, inato.

O procedimento de busca manual por objetos

Evidências muito contundentes sobre a natureza genuinamente numérica das respostas dos bebês de Wynn (1992) também provêm de estudos recentes usando um procedimento não baseado na habituação, mas sim na busca manual pelos objetos.

À mesma época de Wynn (1992), Starkey (1992) desenvolveu um método no qual crianças de um a quatro anos viram bolas de tênis sendo colocadas em uma caixa opaca e, depois, viram os experimentadores acrescentarem ou retirarem de uma a três bolas da caixa. Ao serem instadas a retirarem as bolas após as operações de adição ou subtração, as crianças de um ano e meio a dois anos procuravam pelo número correto de bolas até a quantidade 4, demonstrando uma compreensão dessas operações numéricas ainda em fase pré-verbal.

Esse método de busca manual foi mais recentemente adaptado para crianças de oito a 12 meses (VAN DE WALLE; CAREY; PREVOR, 2000; FEIGENSON; CAREY, 2003). O procedimento de "olhar preferencial" constitui-se numa tarefa de reconhecimento, em que um evento visual anterior é comparado com um atual. Ele fornece uma medida indireta sobre "quantos objetos o bebê acha que tem naquele evento". Em contraste, a busca manual é uma tarefa com maiores demandas de memória de trabalho, uma vez que não há comparação e exige a manutenção da representação dos objetos por 10 a 20 segundos, fornecendo, portanto, uma evidência direta da busca por um objeto que está na mente do bebê (VAN DE WALLE; CAREY; PREVOR, 2000). A busca manual por objetos escondidos tem produzido resultados semelhantes e até mais contundentes que os do paradigma do "olhar preferencial", revelando que, de fato, os mecanismos cognitivos envolvidos em ambos os métodos são os mesmos. Ao verem um experimentador esconder uma bolacha num balde opaco à esquerda e, depois, esconder sucessivamente 1 + 1 = 2 bolachas no balde à direita, bebês de 10 a 12 meses procuram o balde com a maior quantidade. Eles fazem o mesmo com relação a arranjos de 1 versus 3, 2 versus 3, mas falham ao comparar 2 versus 4, 3 versus 4 e 3 versus 6 (FEIGENSON; CAREY; HAUSER, 2002). Entretanto, além da numerosidade *per se*, este sistema numérico exato também computa as propriedades contínuas de pequenas coleções subitizáveis. No mesmo estudo com biscoitos realizado por Feigenson, Carey e Hauser (2002), quando os experimentadores colocaram um biscoito com o dobro do tamanho num balde e dois biscoitos menores no outro balde, cuja soma das áreas era a metade do biscoito grande, os bebês escolheram o balde com o biscoito maior e não o balde com os dois biscoitos menores, baseando sua escolha, portanto, em informações quantitativas contínuas e não-numéricas dos objetos. Estudos posteriores com o paradigma do alcance manual mostraram definitivamente que quando essas variáveis contínuas são totalmente controladas, de forma a criar coleções subitizáveis numericamente diferentes, mas mantendo-se constante a área dos objetos escondidos, os bebês sempre baseiam suas buscas no número (FEIGENSON; CAREY, 2003).

Senso numérico: dois sistemas distintos, o exato e o aproximado

Juntas, as abordagens de habituação (WYNN, 1992a; CAREY, 2002) e do alcance manual dos objetos (VAN DE WALLE; CAREY; PREVOR, 2000; FEIGENSON; CAREY, 2003) revelam que o comportamento numérico dos bebês é sólido e não apenas baseado nas propriedades visuais contínuas e não-numéricas dos estímulos e que os bebês, de fato, além de rastrear mentalmente os objetos também podem representar as propriedades genuinamente numéricas dos estímulos. O comportamento numérico dos bebês apresenta algumas características típicas, isto é, assinaturas comportamentais que aparecem independentemente do método experimental usado.

Entretanto, também ficou claro que a representação numérica súbita, sem o recurso à contagem, é limitada a pequenas quantidades também denominadas quantidades subitizáveis (STARKEY; COOPER, 1980), que vão até três ou quatro objetos (MANDLER; SHEBO, 1982; TRICK; PYLYSHYN, 1994) e que este sistema numérico exato ou "subitizador" evoluiu não somente para o rastreamento preciso de um pequeno número de indivíduos, mas também para a representação de informações sobre suas propriedades quantitativas contínuas, como tamanho. É fácil entender a evolução biológica dessas capacidades se compreendermos que um predador, por exemplo, necessita saber não só o número de indivíduos no grupo que ele pretende atacar, mas também se a presa alvo é a menor e, portanto, a mais fácil de ser abatida entre os outros membros do grupo.

Por outro lado, há muito tempo sustenta-se que há um sistema numérico puro que permite a representação numérica aproximada de grandes coleções. Ele está presente em animais e bebês humanos (DEHAENE, 1997). Experimentos recentes com o paradigma da habituação que controlam totalmente as informações de quantidades contínuas e não numéricas, revelam que bebês de seis meses de idade discriminam numerosidades superiores a três, diferindo na razão 1:2, tais como 8 e 16, 16 e 32 pontos, mas falham quando as razões são menores, como, por exemplo, de 1:1,5; como 8 e 12, ou 16 e 24 pontos. Portanto, essas representações para numerosidades maiores, as únicas exclusivamente numéricas, são sempre aproximadas, mas sua precisão aumenta com o desenvolvimento. Assim, a razão entre as coleções tem um limite mínimo de 1:2 nos bebês de seis meses, de 1:1,5 em bebês de 10 meses (LIPTON; SPELKE, 2003; XU; SPELKE, 2000) e pode ser tão próxima quanto 7:8 em adultos (BARTH; KANWISHER; SPELKE, 2003). E assim como na subitização, as representações numéricas aproximadas não se restringem à modalidade visual, mas se estendem para sequências de eventos temporalmente distintos, como sons, ainda assim mantendo as mesmas assinaturas comportamentais observadas em tarefas com estímulos visuais, isto é, com os padrões de sucesso e falhas relacionadas à razão entre as coleções (LIPTON; SPELKE 2004).

Em suma, hoje sabemos que primatas não-humanos, bebês e adultos humanos possuem dois sistemas numéricos de natureza supramodal, sensíveis tanto a conjuntos de objetos quanto a eventos temporalmente espaçados, como saltos de um fantoche (DEHAENE; DEHAENE-LAMBERTZ; COHEN, 1998; HAUSER et al., 2003; HAUSER; SPELKE, 2004; FEIGENSON; DEHAENE; SPELKE, 2004). Um é o sistema numérico exato até a quantidade de três objetos, o qual, entretanto, também computa variáveis contínuas. Este é o chamado sistema "subitizador" ou de rastreamento de objetos (TRICK; PYLYSHYN, 1994). Ele serve para rastrear indivíduos no espaço e no tempo, mas não parece ter evoluído especificamente para enumerar objetos ou realizar comparações numéricas. E embora macacos e humanos possam usá-lo para representar objetos como indivíduos, não o usam especificamente para representá-los como grupos com valor cardinal (XU; SPELKE; GODDARD, 2005). O outro, o sistema numérico aproximado para quantidades maiores que três, tem se revelado, de fato, como especificamente numérico, ou seja, é imune às variáveis não numéricas.

Experimentos com animais usando procedimentos semelhantes aos aqui reportados revelaram que pequenos primatas possuem as mesmas capacidades numéricas com as mesmas "assinaturas comportamentais" observadas em bebês e adultos humanos (HAUSER et al., 2003). Interessante. Embora as habilidades numéricas espontâneas em macacos sem treinamento proporcionem respostas mais lentas na discriminação numérica aproximada do que em macacos treinados, ainda assim eles são capazes de discriminar coleções com proporções entre 1,25 e 1,5 (HAUSER et al., 2003), superando em muito bebês de seis meses estudados em contextos experimentais com métodos e arranjos de estímulos muito similares (LIPTON; SPELKE, 2003).

Outras investigações psicológicas recentes sobre a cognição numérica demonstram que as representações numéricas e o pensamento matemático culturalmente construído dependem, em parte, de um senso aproximado de magnitudes numéricas, ou seja, um "senso numérico" de natureza não verbal (DEHAENE, 1997; GALLISTEL; GELMAN, 1992). Mesmo impedidos de contar, adultos mantêm-se aptos a determinar a quantidade exata de pequenas quantidades (subitizáveis), mas somente a quantidade aproximada de grandes numerosidades (não subitizáveis) (CORDES et al., 2001). E mesmo quando os números são expressos simbolicamente por algarismos especificando a quantidade exata, ainda assim esses símbolos evocam um senso numérico aproximado, com o qual raciocinamos quando comparamos números ou fazemos subtrações ou somas de números muito grandes (DEHAENE, 1997). É por isso que os adultos são mais rápidos em dizer qual o maior de dois números distantes (por exemplo, 9 e 5) do que de dois números próximos (como 5 e 6) (DEHAENE; DUPOUX; MEHLER, 1990), bem como mais rápidos em rejeitar respostas erradas de problemas aritméticos quando o número incorreto é muito distante do correto (PINEL et al., 2001).

Resultados de estudos antropoculturais convergem na mesma direção das evidências psicológicas. Culturas indígenas da Amazônia, como as dos povos Pirahã e Mundurucu possuem sistemas de contagem de tipo "um, dois, muitos", no primeiro caso e, no segundo, palavras-número até o equivalente a "cinco". Isso limita sua habilidade para determinar com exatidão o valor de conjuntos com numerosidades superiores a três ou cinco num e noutro caso, respectivamente (Pica et al., 2004). Entretanto, ambos os povos possuem habilidades de quantificação não verbal, isto é, sem contagem. Uma exata para pequenas quantidades e outra aproximada para grandes quantidades, as quais parecem se originar dos mesmos mecanismos cognitivos subjacentes às mesmas habilidades já constatadas em animais e bebês humanos (GELMAN; BUTTERWORTH, 2005; HAUSER; SPELKE, 2004; SPELKE, 2003).

Juntas, as evidências antropoculturais, psicológicas e desenvolvimentais apontam para a universalidade dos dois sistemas numéricos não verbais e inatos, além de um sistema numérico exato, este de natureza verbal e culturalmente determinado. Adultos, bebês, crianças pré-escolares e primatas não-humanos parecem compartilhar um sistema de processamento numérico aproximado para números não simbólicos, tais como coleções de pontos ou sequências de tons. Estudos comportamentais com humanos adultos implicam uma ligação entre essas habilidades numéricas não simbólicas e o processamento numérico simbólico. Por exemplo, efeitos similares de distância na precisão e no tempo de reação para arranjos de pontos e numerais arábicos.

Interação e integração entre numerosidade e linguagem

Em um estudo com crianças entre dois e dois anos e meio, Wynn (1992a) produziu resultados extremamente esclarecedores sobre pelo menos um dos aspectos da integração entre os sistemas do senso numérico inato e o da linguagem. Ao usar uma tarefa numérica a qual ela chamou de "dê um número", as crianças eram requisitadas a dar a um fantoche (que falava com ela) 1 a 6 itens de uma pilha de animais de brinquedo. Mesmo as crianças mais novas (dois anos e meio) deram um objeto quando solicitadas a dar um objeto e nenhuma criança deu um objeto quando solicitada a dar dois, três ou quatro objetos, mostrando uma clara compreensão de as palavras número indicam numerosidades. Entretanto, a despeito deste conhecimento inicial, as crianças levaram aproximadamente um ano inteiro a mais para aprender quais palavras se referem a quais numerosidades.

Wynn (1992b) encontrou que uma criança de dois anos e meio pode, de fato, conhecer a cardinalidade de pequenos conjuntos subitizáveis de itens como, por exemplo, que 3 é mais que 2 e menos que 4, sem saber, necessariamente, que o último número de uma contagem indica a numerosidade (a cardinalidade). As crianças mais novas (dois anos e meio) mesmo que ainda estivessem começando a aprender a contar, foram bem sucedidas quando requeridas a dar apenas um brinquedo ao fantoche, bem sucedidas algumas vezes quando requeridas a dar 2 animais e quase sempre deram um punhado de brinquedos ao serem requisitadas a dar de três a cinco animais, quase nunca recorrendo à contagem. Por outro lado, as crianças de três anos e meio tenderam a contar os itens de uma pilha à medida que os davam ao fantoche e sempre paravam na palavra número pedida, tendo sido bem sucedidas até a numerosidade de três ou quatro (veja Tabela 1).

Em suma, Wynn (1992b) mostrou que por volta de três anos e meio de idade as crianças já imputam um significado às palavras número que de alguma forma está ligada à numerosidade, isto é, à cardinalidade, quando esta está dentro do seu alcance de contagem.

Os circuitos neurais do comportamento numérico

Tabela 1: O desenvolvimento da compreensão dos números na criança e a rotina de contagem (WYNN, 1990, 1992).

Idade (em anos)	**Compreensão das palavras número e rotinas de contagem**
2-2,5	*"Um"* designa 'um indivíduo". *Dois, três, ..., seis*... designa "um grupo"
2,5- 3, 25	*"Um"* designa "um indivíduo" *"Dois"* designa um grupo composto "*um indivíduo mais outro indivíduo"* *Três,...seis,...*designa *"outros grupos acima de dois elementos"*
3,25- 3,5	*"Um"* designa 'um indivíduo". *Dois, três, ..., seis*... designa "um grupo" *"Três"* designa um "grupo composto de um indivíduo, outro indivíduo, e ainda um outro indivíduo". *Quatro, ... seis ...* designa *"um outro grupo além do grupo "Dois" e do grupo "Três".*
3,5 a adulto	Cada palavra-número designa um "grupo de indivíduos". O grupo designado por cada palavra-número contém "um indivíduo a mais" que o grupo designado pela palavra-número anterior na rotina de contagem.

Fonte: adaptada de Spelke (2003).[3]

Finalmente, essas assinaturas comportamentais de um senso numérico básico, filogeneticamente herdado, são corroboradas por evidências de uma "assinatura neurológica" que revelam a existência de substratos neurais sobre os quais se assenta o comportamento numérico. Cinco tipos de evidências neurológicas suportam a ideia de que porções bilaterais do córtex parietal inferior, particularmente a porção horizontal do sulco

[3] SPELKE, E. S. What makes humans smart? In: GENTNER, D.; GOLDIN-MEADOW, S. Advances in the investigation of language and thought. Cambridge, MA: MIT Press, 2003.

intraparietal, intimamente ligada ao processamento espacial (GREFKES; FINK, 2005; HUBBARD et al., 2005), desempenham um papel, se não específico, crucial na representação numérica. Vejamos, pois, um resumo de parte da literatura sobre neurocognição numérica, a partir de um enfoque histórico.

A neuropsicologia dos números: estudos de lesão cerebral

No início do século XX, Lewandowsky e Stadelmann (1908, apud ARDILA; ROSSELLI, 2002), forneceram o primeiro relato detalhado de um paciente cujos danos focais nas áreas visuais do cérebro (córtices occipito-temporais) induziram a distúrbios seletivos de cálculo. O paciente podia fazer cálculos mentais, mas tinha severas dificuldades na leitura dos símbolos aritméticos. Esse estudo constituiu um marco da neuropsicologia e da neurocognição matemática por produzir evidência de que desordens de cálculo podem ser diferentes e dissociadas de distúrbios de linguagem.

Ainda em 1919, o neurologista sueco Solomon E. Henschen (1847-1930), interessado nas afasias e no processamento visual, descobriu que danos focais nos córtex parietal prejudicavam com relativa seletividade o cálculo matemático (HENSCHEN, 1919, apud ARDILA; ROSSELLI, 2002). Em 1925, Henschen revisou 305 casos da literatura juntamente com 67 de seus pacientes e confirmou que lesões focais em certas áreas cerebrais do hemisfério esquerdo próximas, mas distintas daquelas envolvidas na linguagem, prejudicavam cálculos matemáticos preservando a linguagem e a música (HENSCHEN, 1925, apud ARDILA; ROSSELLI, 2002). Henschen reportou que a terceira convolução (giro) do córtex frontal inferior corresponderia ao centro da pronúncia dos números, ao passo que duas áreas posteriores no córtex parietal inferior, particularmente no giro angular (área de Brodman BA39) estariam envolvidas mais especificamente no processamento numérico: a parte mais infero-posterior do giro angular (mais próxima dos córtices visuais no giro occipital) seria o centro da "escrita dos números", ao passo que a área superior do giro angular envolvendo a fissura intraparietal seria o centro da "leitura dos números". Henschen foi quem cunhou o termo "acalculia", usado até hoje na neuropsicologia. Assim, os estudos de Henschen sugeriram sistemas neurais independentes que pareciam especialmente engajados em aspectos específicos na aritmética básica e estabeleceram de uma vez por todas as bases das futuras pesquisas neurológicas sobre processamento dos números (ARDILA; ROSSELLI, 2002).

O neurologista alemão Hans Berger (1873-1941), responsável pelo primeiro uso da técnica de eletroencefalograma (EEG) em humanos, também foi o primeiro a introduzir a distinção entre acalculia primária e secundária (BERGER, 1926, apud ARDILA; ROSSELLI, 2002). Conforme Berger, a acalculia primária ou pura, também chamada de "anaritmetia", se caracterizaria pela perda de conceitos numéricos e da habilidade de compreender e executar operações aritméticas básicas, ao passo que a acalculia secundária compreenderia déficits no cálculo decorrentes de outros déficits cognitivos não específicos dos números, isto é, de déficits de domínio mais geral, tais como memória, linguagem etc. Portanto, os estudos de Berger e sua nomenclatura proposta, representam a primeira distinção clara entre déficits de cálculo de natureza mais especificamente numérica e déficits de cálculo decorrentes de prejuízos cognitivos na linguagem ou na memória.

Outro neurologista, o austríaco Josef Gerstmann (1887-1969) propôs, com base em inúmeros estudos de prejuízos na cognição matemática decorrentes de danos cerebrais, que a acalculia primária resultaria de lesões no giro angular esquerdo e estaria sistematicamente associada com a agrafia, desorientação espacial esquerda-direita e agnosia digital. A acalculia primária juntamente com este conjunto de sintomas não matemáticos constitutuem uma única síndrome que, desde então, é chamada de "síndrome de Gerstmann" e faz parte do repertório de avaliações neuropsicológicas até os dias de hoje.

Em 1961, Hecaen e colegas (HÉCAEN; ANGELERGUES; HOUILLIER, 1961 apud ARDILA; ROSSELLI, 2002) publicaram um extenso trabalho que investigou 183 pacientes com lesões retro-rolândicas, isto é, danos nas áreas cerebrais posteriores, excluindo-se os pacientes com danos frontais. Hecaen e seus colaboradores identificaram três tipos principais de desordens de cálculo: (1) alexia e agrafia para números, associada ou não com palavras; (2) acalculia espacial, desordem da organização espacial dos dígitos que leva a erros de cálculo, mas com preservação dos números e dos fatos aritméticos (frequentemente associada com heminegligência espacial e inversões de números); (3) anaritmetia (acalculia primária), déficit básico na habilidade matemática computacional que parece refletir déficits conceituais dos números, excluindo alexia e agrafia para números e acalculia espacial. Entretanto, assim como todos os outros autores reportados, Hecaen e seus colegas (1961) não supõem um déficit isolado dos conceitos numéricos e operações aritméticas. É importante notar também que Hécaen, Angelergues e Houillier também fornecem uma descrição de acalculia primária mais seletiva do que a síndrome de Gerstmann ao propor que a anaritmetia pode ser encontrada sem estar associada à agrafia para números e acalculia espacial.

Resumindo esta breve incursão histórica dos déficits matemáticos em estudos de lesão cerebral, podemos concluir que a anaritmetia ou acalculia primária é um déficit básico da habilidade computacional dos números. Ela corresponde a uma incapacidade de compreender quantidades e fazer comparações e estimativas numéricas, isto é, perda de conceitos numéricos e uso de regras de cálculo para executar operações aritméticas básicas. Os déficits de cálculo na anaritmetia são encontrados em operações escritas e orais, com preservação da linguagem, conhecimento dos números, da contagem e outros fatos aritméticos memorizados verbalmente. Portanto, tornou-se largamente conhecido e aceito na neurologia que a anaritmetia/acalculia primária adquirida está associada com danos no giro angular esquerdo do lobo parietal desde os estudos de Henschen (ARDILA; ROSSELLI, 2002) e representa danos a um sistema conceitual genuinamente numérico que independe da linguagem. Em suma, embora danos linguísticos normalmente causem sérios prejuízos à aritmética, danos em áreas não linguísticas podem causar sérios prejuízos em aspectos conceituais básicos dos números, os quais desencadeiam prejuízos no cálculo, independentes da preservação da linguagem.

Juntando-se esses achados históricos aos estudos neuropsicológicos mais recentes, podemos resumir a neurocognição dos números nos parágrafos que se seguem.

Primeiro, lesões parietais em adultos podem causar danos seletivos da compreensão e operações com números preservando a linguagem (DEHAENE; COHEN, 1997; LEMER et al., 2003; DELAZER et al., 1999). Reciprocamente, o número pode ser seletivamente preservado na presença de severos déficits no processamento de outras categorias de palavras em um paciente com lesões parietais e linguagem preservada (DEHAENE; COHEN, 1997) que, apesar de não ser capaz de dizer qual o número médio de dois números apresentados, chegando a responder que entre o 1 e 3 ficava o 7 (tarefa de bissecção numérica), mas conseguia realizar a bissecção com letras, dias da semana, meses, ou notas de uma escala musical. Mais intrigante ainda é um estudo recente de três pacientes com extensa lesão nas áreas linguísticas perissilvianas e grave quadro de afasia, incluindo afasia de expressão, severo agramatismo tanto na linguagem oral quanto escrita e apenas uma pequena compreensão léxica, que ainda assim preservou a matemática até mesmo mais complexa, incluindo operações com dois e três dígitos e operações com parênteses, do tipo: (3 x 3) - 6 (VARLEY et al., 2005).

Segundo, comparações entre as bases cerebrais do número em culturas diferentes indicam que o envolvimento do sulco intraparietal é, de fato, universal. Se a matemática fosse uma atividade exclusivamente cultural envolvendo uma arquitetura cerebral eminentemente cultural, seria de se esperar uma considerável variação das áreas cerebrais envolvidas em função do aprendizado, educação e cultura. Relatórios clínicos de vários lugares do mundo, entretanto, confirmam que as lesões que ocasionam a discalculia adquirida ou acalculia, assim como as áreas de ativação neural durante tarefas numéricas em indivíduos sadios, estão sistematicamente associadas à região parietal inferior (DEHAENE; DEHAENE-LAMBERTZ; COHEN, 1998).

Terceiro, estudos sobre a discalculia do desenvolvimento[4] indicam a contribuição altamente específica do sulco intraparietal para o processamento do número (TEMPLE, 1989; BUTTERWORTH, 1999). As pessoas afetadas precisam confiar em estratégias verbais laboriosas mesmo em tarefas tão simples como determinar que nove é maior do que três, ou que um pato possui duas pernas. A discalculia do desenvolvimento já foi relacionada a um dano cerebral precoce restrito a uma pequena região do córtex parietal inferior (LEVY; REIS; GRAFMAN, 1999).

[4] Discalculia do desenvolvimento é um déficit congênito específico na percepção numérica e no aprendizado da matemática escolar. Ele afeta de 5% a 6% das crianças que, à despeito de um quociente de inteligência (QI) completamente normal, ausência de qualquer dificuldade na aquisição da leitura e da escrita e de boa escolarização, nunca adquirirão o conceito de número.

A neurocognição numérica em estudos de neuroimagem

Estudos recentes de neuroimagem (DEHAENE et al., 2003) e técnicas neurofisiológicas utilizando EEG (DEHAENE, 1996; KIEFER; DEHAENE, 1997) mostram que o segmento horizontal do sulco intraparietal, bilateralmente (DEHAENE et al., 2003), é a área de maior ativação em indivíduos sadios enquanto desempenham vários tipos de tarefas numéricas simbólicas, como comparação numérica (identificação do maior de dois números), aproximação numérica e operações aritméticas básicas mais complexas de dois dígitos (HUBBARD et al., 2005). O sulco intraparietal em ambos os hemisférios é uma área de integração multimodal espaço-temporal das informações visuais, auditivas e motoras e na cognição matemática esta área está envolvida na convergência multimodal da entrada de informação simbólica e não simbólica (processamento perceptivo dos objetos e seus atributos espaço-temporais) no processamento matemático (FEIGENSON; DEHAENE; SPELKE, 2004). O envolvimento do sulco intraparietal nos conceitos numéricos básicos, tanto nos estudos de lesão quanto nos de neuroimagem, reforçam os achados psicológicos no sentido de que, não obstante a participação crucial da linguagem na aritmética exata, o conceito numérico básico é um sistema cognitivo não linguístico, de natureza espaço-temporal e, portanto, supramodal (HUBBARD et al., 2005).

As bases neurais do senso numérico em bebês são as mesmas dos adultos

Cantlon et al. (2006), usando a ressonância magnética funcional (fMRI) em crianças de quatro anos de idade e adultos enquanto estes observavam arranjos de elementos que podiam variar tanto em número quanto apenas na forma local dos elementos, mostraram que ambos apresentaram maior resposta do sulco intraparietal para arranjos visuais que desviavam do estímulo padrão no seu número de elementos do que para estímulos que desviavam na forma local do elemento. Esta é a primeira evidência de que os circuitos neurais da cognição numérica conhecidos no adulto já ocorrem desde muito cedo no desenvolvimento, antes da experiência simbólica sofisticada, em consonância com as evidências comportamentais aqui reportadas e discutidas.

Usando o mesmo procedimento de Wynn (1992), com modificações e em combinação com a técnica de potenciais relacionados a eventos (PRE), Berger e Tzur (2006) mediram a ativação eletrofisiológica diferencial no escalpo de bebês de seis a nove meses durante as tarefas e compararam essas ativações com as de adultos observando equações matemáticas simbólicas corretas e incorretas. Além de os bebês terem olhado por menos tempo para as equações corretas do que para as incorretas, como esperado, o cérebro dos bebês mostraram potenciais negativos em sincronia com as apresentações da solução significantemente diferente para as equações incorretas. Mais interessante ainda é que o padrão de ativações no cérebro dos bebês foi semelhante ao dos cérebros dos adultos.

Estudo um pouco mais recente realizado por Izard, Dehaene-Lambertz e Dehaene (2008), produziu resultados bastante interessantes. É sabido que o cérebro humano possui áreas cerebrais diferentes para o processamento dos atributos de identidade dos objetos (cor e forma), localizadas ventralmente nos córtices occipito-temporais inferiores, ao passo que o processamento viso-espacial e de movimento é servido por um sistema dorsal nas áreas occipito-parietais superiores (LENT, 2001; ANDRADE, 2006a). Conforme vimos, o processamento numérico, de natureza espaço temporal é dependente de uma área específica deste sistema dorsal, particularmente o sulco intraparietal bilateralmente (DEHAENE et al., 2003). Izard, Dehaene-Lambertz e Dehaene (2008) registraram os potenciais elétricos em bebês de apenas três meses de idade, evocados tanto por mudança na identidade dos objetos quanto na sua cardinalidade em um dado arranjo observado. Usando um modelo 3D da cabeça do bebê, Izard, Dehaene-Lambertz e Dehaene (2008) reconstruíram as fontes corticais destas respostas eletrofisiológicas e, da mesma forma que nos adultos, as mudanças de identidade do objeto e de número foram distintas, revelando uma organização básica ventral/dorsal já definida no cérebro dos bebês. Como nos adultos, a identidade do objeto nos bebês é codificada ao longo de um circuito ventral nos lobos temporais, ao passo que as mudanças de numerosidade ativaram uma rede parieto-pré-frontal, mas, principalmente no hemisfério direito. Estes resultados não somente enfatizam a continuidade desenvolvimental do senso numérico como também apontam para uma propensão funcional inata na organização cerebral.

Finalmente, muitas espécies animais respondem à numerosidade, tanto em experimentos com treinamento de tipo "escolha de acordo com o modelo" (*matching to sample*) quanto espontaneamente, em experimentos de busca manual por alimentos humanos (HAUSER et al., 2003; HAUSER; SPELKE, 2004) semelhantes àqueles desenvolvidos com bebês (FEIGENSON; CAREY, 2003). Vários estudos já usaram registros neurofisiológicos de populações neuronais utilizando múltiplos eletrodos implantados diretamente no cérebro de macacos, revelando um sistema parieto-frontal seletivamente ativado pelos números, particularmente nas vizinhanças do sulco intraparietal em uma área homóloga ao do sulco intraparietal do cérebro dos humanos (para uma revisão, veja NIEDER, 2005).

Discussão

Todos os humanos, independente de sua cultura e educação, possuem uma compreensão intuitiva de número (DEHAENE, 1997). Com base na literatura aqui revisada, somos da opinião de que os estudos da AEC, mais especificamente aqueles que utilizam delineamentos experimentais baseados no paradigma da equivalência, sugerem que, de fato, há uma capacidade numérica independente de linguagem que possibilita a realização de tarefas numéricas simples e com arranjos com pequeno número de elementos.

Nas últimas décadas, a investigação sistemática dos precursores das habilidades numéricas nos animais e bebês humanos tem lançado luzes sobre as origens da aritmética culturalmente construída. Investigações comportamentais têm revelado que animais como ratos, pombos e macacos podem extrair a numerosidade aproximada de grupos de objetos visuais e auditivos. A numerosidade é representada pelos animais independentemente de outros parâmetros tais como tamanho ou forma do objeto (HAUSER; SPELKE, 2004; para uma breve revisão em português veja ANDRADE 2006a, 2006b e PRADO, 2010).

Eloquentes evidências comportamentais de imagem cerebral e neurofisiológicos obtidas de bebês e adultos humanos e também de primatas não humanos, convergem no sentido de sugerirem que o conhecimento do número é uma competência evoluída do cérebro dos animais e humanos, com uma base cortical no córtex intraparietal bilateralmente (HUBBARD et al., 2005; FEIGENSON; DEHAENE; SPELKE, 2004). A hipótese do senso numérico postula que este sistema cerebral já está disponível desde muito cedo no desenvolvimento, em bebês tão novos quanto três meses de idade e guia o aprendizado dos numerais e da aritmética na infância e a aquisição da matemática complexa adulta. As evidências comportamentais e neurológicas deste sistema numérico não podem ser atribuídas a uma reação atencional de domínio geral à novidade ou à familiaridade.

Assim, um sólido corpo de evidências produzidas por criteriosas investigações científicas da psicologia e da neurociência vêm suportar o intuicionismo matemático de Poincaré, para quem o verdadeiro raciocínio matemático se originaria da intuição de número, a única intuição passível de certeza (NOGUEIRA, 2006). Como vimos no início do capítulo, a intuição do número é, para Poincaré, simplesmente uma faculdade básica "de conceber que uma unidade pode agregar-se a um conjunto de unidades" (POINCARÉ, 1943, p. 37, apud NOGUEIRA, 2006, p. 143).

As evidências não suportam o logicismo piagetiano, no qual o conceito de número é o resultado de um longo período de construções lógicas sensório-motoras, surgindo somente após os seis ou sete anos de idade; também não suportam o logicismo proposicional de Vygotsky, no qual o conceito de número também surge com as generalizações complexas dependente da linguagem. Ao contrário, as evidências ressaltam a continuidade entre filogênese e ontogênese do senso numérico, apontando para tendências funcionais na organização cerebral que podem canalizar para áreas restritas do cérebro o aprendizado subsequente.

Esse senso numérico inato, entretanto, é baseado em dois mecanismos cognitivos numéricos supramodais, isto é, respondem a números da modalidade do estímulo (visual, auditiva etc.). Um sistema é exato, mas limitado à apreensão súbita de três ou quatro elementos, chamado subitização. O outro é aproximado, para numerosidades maiores. Assim, ambos os sistemas são muito limitados e estão longe da aritmética exata para grandes numerosidades e mais distantes ainda da matemática complexa culturalmente construída. A existência de um senso numérico de natureza perceptiva espaço-temporal é consistente em parte com a posição de Piaget de que a linguagem não era tudo. Entretanto, em crianças mais velhas e nos adultos, esse sistema numérico de natureza não verbal é suplementado pela aquisição da linguagem, como os símbolos para quantidades, as rotinas de cálculo (algoritmos), etc., que possibilitam o desenvolvimento da matemática culturalmente construída.

Com relação à linguagem, os recursos que esta possibilita têm sido implicados na cognição matemática de diversas formas (SPELKE, 2003). Uma forma possível é que as palavras-números fornecem uma base para se aprender a manipular as quantidades grandes que não podem ser apreendidas com precisão pela percepção numérica e com precisão cada vez maior. (BLOOM, 2000). Outra forma, esta bastante óbvia, é a linguagem poder representar um código por meio do qual as computações matemáticas são realizadas (SPELKE, 2003; CAREY, 2004). Esses papéis da linguagem para a matemática exata e mais sofisticada parecem ficar evidentes em culturas nas quais a ausência de palavras número parece resultar na limitação da cognição numérica à enumeração exata até três objetos e enumeração aproximada em arranjos acima de três (GORDON, 2004; PICA et al., 2004). Há também os que argumentam que existem fortes paralelos entre a sintaxe da linguagem natural e a estrutura da Matemática (HAUSER; CHOMSKY; FITCH, 2002). Uma discussão detalhada das evidências e propostas mais recentes da cognição numérica foge ao escopo desta revisão, merecendo um artigo específico.

De qualquer modo, como evidenciam vários estudos (PRADO et al., 2006; LEMER, 2003; veja ANDRADE, 2006a), é bastante provável que a habilidade de raciocinar sobre conjuntos numéricos grandes (entender que ao retirar dois objetos de uma coleção de 20 restarão 18), é impossível sem a posse de uma língua natural com palavras-número para grandes quantidades. Há um consenso atual de que a competência linguística nos possibilita ir além das outras espécies animais na aritmética e em outros domínios, porque nos permite desenvolver um sistema simbólico que sustenta o cálculo exato e a matemática sofisticada. Esse consenso originou a visão atual de que a aritmética surge a partir da integração de dois sistemas, um verbal que dá origem às palavras-número e ao sistema simbólico e um sistema de representação não verbal ou não simbólica, de natureza espaço-temporal das numerosidades (SPELKE, 2003; CAREY, 2004; WYNN, 1992; FEIGENSON; DEHAENE; SPELKE, 2004). Em outras palavras, sem a linguagem o que nos resta são os mecanismos de percepção numérica exata, até três ou quatro elementos e a aproximada, que estão presentes nos bebês humanos bem como em primatas, ratos e outros animais (NIEDER, 2005). Nesse sentido, a proposta da voz interna ou fala egocêntrica, de Vygotsky, pode possuir um considerável mérito, pois os sistemas numéricos inatos de natureza não-verbal necessitam ser suplementados pela linguagem para a criação de símbolos para quantidades, das rotinas de cálculo (algoritmos), etc. Neste aspecto o logicismo ganha força.

Nesse sentido, o fato de o comportamento matemático culturalmente construído envolver a integração do senso numérico, baseado em mecanismos sensório-perceptivos ou discriminativos, com o sistema linguístico, isto é um tanto consistente com a noção de que o comportamento matemático é um comportamento verbal controlado discriminativamente pelos atributos numéricos do ambiente (DE ROSE, 2010), mas somente se considerarmos o comportamento matemático verbal como uma consequência do senso numérico e não o contrário. De qualquer modo, as evidências não nos permitem desprezar o papel fundamental dos sistemas cognitivos inatos que constituem o senso numérico nem a importância da sistematização da contagem e dos algoritmos no aprendizado da aritmética exata.

As evidências apontam na direção de uma visão conciliatória que assume o papel fundamental de um intuicionismo matemático e uma percepção numérica básica (percepção exata de grandes quantidades e aproximada de grandes quantidades) na definição de número e pensamento matemático, mas a qual necessita ser suplementada pelos recursos simbólicos e lógico-proposicionais da linguagem no desenvolvimento da matemática complexa culturalmente construída. Esta interação entre os sistemas numéricos básicos e inatos e a linguagem parece constituir o *tertium* almejado por Piaget para a definição de número e desenvolvimento do pensamento matemático, uma terceira visão capaz de conciliar as duas das principais correntes do pensamento matemático (logicismo *versus* intuicionismo).

Finalmente, o fato de o comportamento matemático ser crucialmente dependente do senso numérico e este, por sua vez, ser uma capacidade inata servida por um substrato neural relativamente específico localizado no sulco intraparietal, alterações congênitas sutis envolvendo essa área podem acarretar um prejuízo do desenvolvimento normal das competências numéricas na presença de outros domínios praticamente intactos. Este é o caso já mencionado da discalculia do desenvolvimento (TEMPLE, 1989; BUTTERWORTH, 1999). Entretanto, as abordagens pedagógicas e psicopedagógicas que não admitem a existência de quaisquer circuitos neurais e operações mentais inatas subjacentes aos domínios culturalmente construídos e seu aprendizado, uma vez que nestas concepções os sistemas neurocognitivos são todos construídos pela experiência, também não admitem nenhuma dificuldade de aprendizagem de ordem congênita, exceto nos casos de lesões orgânicas diagnosticáveis (ANDRADE, 2006a). Em geral, acredita-se que as dificuldades de aprendizagem são determinadas por insuficiências no processo de comunicação (sendo a linguagem o parâmetro do desenvolvimento que é mais influenciado pelos "fatores sociais" do aprendizado) ou uma motivação insuficiente causada, frequentemente, pela posição em que se encontra o estudante, ou de sujeito alienado ou de sujeito criativo (ANDRADE, 2006a). Dessa forma, fatalmente negligenciaremos uma significativa parcela da população que necessita de atendimento psicopedagógico especializado com conhecimento das dificuldades específicas e intervenções mais adequadas para cada caso.

Referências

AGOSTINHO, S. *Confissões*. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

AGUIAR, A.; BAILLARGEON, R. 2.5-month-old infants' reasoning about when objects should and should not be occluded. *Cognitive psychology*, v. 39, n. 2, p. 116-157, 1999.

ANDRADE, P. E.; PRADO, P. S. T. Psicologia e neurociência cognitivas: alguns avanços recentes e implicações para a educação. *Interação em Psicologia*, v. 7, p. 73-80, 2003.

ANDRADE, P. E. Uma abordagem evolucionária e neurocientífica da música. *Neurociências*, v. 1, n. 1, p. 21-33, 2004.

ANDRADE, P. E. A teoria socioculturalista de Vygotsky e o papel da linguagem na formação de conceitos: o que a psicologia experimental e a neurociência têm a nos dizer. *Neurociências*, v. 3, p. 158-178, 2006a.

ANDRADE, P. E. O desenvolvimento cognitivo da criança: o que a psicologia experimental e a neurociência têm a nos dizer. *Neurociências*, v. 3, p. 98-118, 2006b.

ARDILA, A.; ROSSELLI, M. Acalculia e dyscalculia. *Neuropsycholy review*, v. 12, n.4, p. 179-231, 2002.

BARTH, H.; KANWISHER, N.; SPELKE, E. The construction of large number representations in adults. *Cognition*, v. 86, p. 201-221, 2003.

BERGER, A.; TZUR, G. Infant brains detect arithmetic errors. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 103, n. 33, p. 12649-12653, 2006.

BLOOM, P. *How children learn the meanings of words*. Cambridge: The MIT Press, 2000.

BURGO, O. G. O. *O ensino e a aprendizagem do conceito de número na perspectiva piagetiana: uma análise da concepção de professores da educação infantil*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, UEM, Maringá, 2007.

BUSSAB, V. S. R. Fatores hereditários e ambientais no desenvolvimento: a adoção de uma perspectiva interacionista. *Psicologia*: Reflexão e Crítica, v. 13, p. 233-243, 2000.

BUTTERWORTH, B. *The Mathematical Brain*. Londres: MacMillan, 1999.

CANTLON, J.F. et al. *Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children*. Epub, 2006.

CAREY, S. Do constraints on word meaning reflect prelinguistic cognitive architecture? *The japanese journal of cognitive science*, v. 4, p. 35-58, 1997.

______. Evidence for numerical abilities in young infants: a fatal flaw? *Developmental Science*, v. 5, p. 202-205, 2002.

______. Bootstrapping and the origins of concepts. *Daedalus*. Cambridge: The MIT Press, p. 59-68, 2004.

CARVALHO NETO, M. B. Análise do comportamento: behaviorismo radical, análise experimental do comportamento e análise aplicada do comportamento. *Interação em Psicologia*, v. 6, p. 13-18, 2002.

COHEN, L. B.; MARKS, K. S. How infants process addition and subtraction events. *Developmental Science*, v. 5, p. 186-201, 2002.

CORDES, S. et al. Variability signatures distinguish verbal from nonverbal counting for both large and small numbers. *Psychonomic bulletin & review*, v. 8, n. 4, p. 698-707, 2001.

DE ROSE, J. C. C. Prefácio. In: CARMO, J. S.; PRADO, P. S. T. (Org.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. Santo André: Esetec Editores Associados, 2010. p. 7-12.

______. Classes de estímulos: implicações para uma análise comportamental da cognição. *Psicologia*: teoria e pesquisa, v. 9, n. 2, p. 283-303, 1993.

DEHAENE, S. *The number sense*. New York: Oxford University Press, 1997.

______. The organization of brain activations in number comparison: event-related potentials and the additive-factors method. *Journal of Cognitive Neuroscience*, v. 8, p. 47-68, 1996.

DEHAENE, S.; COHEN, L. Cerebral pathways for calculation: double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, p. 219-50, 1997.

DEHAENE, S.; DEHAENE-LAMBERTZ, G.; COHEN, L. Abstract representations of numbers in the animal and human brain. *Trends in Neuroscience*, 1998.

DEHAENE, S.; DUPOUX, E.; MEHLER, J. Is numerical comparison digital? analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, v. 16, n. 3, p. 626, 1990.

DEHAENE, S. et al. Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsycholy*, v. 20, n. 3-6, p. 487-506, 2003.

DELAZER, M. et al. Numerical skills and aphasia. *Journal of the International Neuropsychological Society*, p. 213-21, 1999.

DESCARTES, R. *O discurso do método*. Ediouro, 1986. (Coleção Universidade).

DRACHENBERG, H. B. Um estudo experimental sobre aquisição do conceito de número. In: CARMO, J. S.; PRADO, P. S. T. (Org.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. Santo André: Esetec Editores Associados, 2010. p. 29-48.

ELLIOT, A. J. *A Linguagem da Criança*. Rio de Janeiro, Zahar, 1982.

FANTZ, R. L. Visual experiences in infants: decreased attention to familiar patterns relative to novel ones. *Science*, 1964.

FEIGENSON, L.; CAREY, S. Tracking individuals via object files: evidence from infants' manual search. *Developmental Science*, v. 6, p. 568-584, 2003.

FEIGENSON, L.; CAREY, S.; HAUSER, M. The representations underlying infants' choice of more: object files vs. analog magnitudes. *Psychological Science*, v. 13, n. 2, p. 150-156, 2002.

FEIGENSON, L.; DEHAENE, S.; SPELKE, E. S. Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, v. 7, n. 8, p. 307-314, 2004.

FODOR, J. *The Modularity of Mind*. Cambridge: The MIT Press, 1983.

FUSON, K. C. *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag, 1988.

GALLISTEL, C. R.; GELMAN, R. Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, v. 44, n. 1, p. 43-74, 1992.

GAZZANIGA, M. S.; HEATHERTON, T. F. *Ciência psicológica*: mente, cérebro e comportamento. Porto Alegre: Artmed, 2005.

GELMAN, R. Cognitive development. In: PASHLER, H.; MEDIN, D. L. (Org.). *Stevens' handbook of experimental psychology*. 3. ed. New York: Wiley, 2002.

GELMAN, R.; BUTTERWORTH, B. Number and language: how are they related? *Cognitive Science*, v. 9, p. 6-10, 2005.

GORDON, P. Numerical cognition without words: evidence from Amazonia. *Science*, 2004.

GREEN, G. A tecnologia de controle de estímulo no ensino de equivalências número quantidade. In: CARMO, J. S.; PRADO, P. S. T. (Org.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. Santo André: Esetec Editores Associados, 2010, p. 49-68.

GREFKES, C.; FINK, G. R. Review: the functional organization of the intraparietal sulcus in humans and monkeys. *Journal of anatomy*, v. 207, n. 1, p. 3-17, 2005.

HAUSER, M. D.; CHOMSKY, N.; FITCH, W. T. The faculty of language: what is it, who has it, and how did it evolve? *Science*. 2002.

HAUSER, M. D. et al. Evolutionary foundations of number: spontaneous representation of numerical magnitudes by cotton-top tamarins. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, v. 270, p. 1441-1446, 2003.

HAUSER, M. D.; SPELKE, E. S. Evolutionary and developmental foundations of human knowledge: a case study of mathematics. In: GAZZANIGA, M. *The cognitive neurosciences*, Cambridge: The MIT Press, 2004.

HÉCAEN, H.; ANGELERGUES, R.; HOUILLIER, S. Les variétés cliniques des acalculies au cours des lésions rétro-rolandiques: approche statistique du problème. *Revue Neurologique*, v. 105, p. 85-103, 1961.

HELMHOLTZ, H. V. *Treatise on pkysiological optics*. Trad. J. P. C. Southall. New York: Dover, 1962

HUBBARD et al. Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, v. 6,p. 435-448, 2005.

HUNTLEY-FENNER, G.; CAREY, S; SOLIMANDO, A. Objects are individuals but stuff doesn't count: perceived rigidity and cohesiveness influence infants' representations of small numbers of discrete entities. *Cognition*, v. 85, p. 203-221, 2002.

IZARD, V.; DEHAENE-LAMBERTZ, G; DEHAENE, S. Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. *PLoS biology*, v. 6, n. 2, p. e11, 2008.

KAMII**,** C. *A criança e o número*. Campinas, SP: Papirus, 1995.

KAMII, C.; DECLARK, G. *Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. Campinas, SP: Papirus, 1986.

KELLER, F. S.; SCHOENFELD, W. N. *Princípios de psicologia*. São Paulo: EPU, 1974.

KIEFER, M.; DEHAENE, S. The time course of parietal activation in single-digit multiplication: evidence from event-related potentials. *Mathematical Cognition*, v. 3, p. 1-30, 1997.

KOBAYASHI, T. et al. Baby arithmetic: one object plus one tone. *Cognition*, v. 91, n. 2, p. B23-B34, 2004.

KOECHLIN, E.; Dehaene, S.; Mehler, J. Numerical transformations in five-month-old human infants. *Mathematical cognition*, v. 3, n. 2, p. 89-104, 1997.

KUHL, P. K. Early language acquisition: cracking the speech code. *Nature reviews neuroscience*, v. 5, p. 831-843, 2004.

LEMER, C. et al. Approximate quantities and exact number words: dissociable systems. *Neuropsychologia*, p. 1942-1958, 2003.

LENT, R. *Cem bilhões de neurônios: conceitos fundamentais de neurociência*. São Paulo: Atheneu, 2001.

LEVY, L. M.; REIS, I. L.; GRAFMAN, J. Metabolic abnormalities detected by 1H-MRS in dyscalculia and dysgraphia. *Neurology*, p. 639-641, 1999.

LIMA, L. O. *Piaget*: sugestões aos educadores. Petrópolis: Vozes, 1999.

LIMA, L. O. *Mutações em educação segundo Mc Luhan*. 8. ed., Petrópolis: Vozes, 1975.

LIPTON, J. S.; SPELKE, E. S. Origins of number sense: large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, v. 14, p. 396-401, 2003.

LIPTON, J. S.; SPELKE, E. S. Discrimination of large and small numerosities by human infants. *Infancy*, v. 5, p. 271-290, 2004.

LURIA, A. R. *Cognitive development*: its cultural and social foundations. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

MAGALHÃES, C. M. C.; GALVÃO, O. F. Pré-requisitos do comportamento matemático: análise experimental do comportamento de contar. In: CARMO, J. S.; PRADO, P. S. T. (Org.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. Santo André: Esetec Editores Associados, 2010. p. 95-158.

MANDLER, G.; SHEBO, B. J. Subitizing: an analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology*: general, v. 111, p. 1–21, 1982.

MATOS, M. A. O behaviorismo metodológico e suas relações com o mentalismo e o behaviorismo radical. In: BANACO, R. A. *Sobre comportamento e cognição:aspectos teóricos, metodológicos e de formação em análise do comportamento e terapia cognitivista*. São Paulo: ARBytes, 1997.

MELTZOFF, A. N. Imitation as a mechanism of social cognition: origins of empathy, theory of mind, and the representation of action. In: U. Goswami (Org.). *Handbook of childhood cognitive development*. Oxford: Blackwell Publishers, p. 6-25, 2002.

MIX, K. S. Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development*, v. 14, n, 2, p. 269-297, 1999.

MONTOYA, D. Pensamento e linguagem: percurso piagetiano de investigação. *Psicologia em Estudo*, v. 11, p. 119-127, 2006.

NIEDER, A. Counting on neurons: the neurobiology of numerical competence. *Nature Reviews Neuroscience*, v. 5, p. 177-190, 2005.

NOGUEIRA, C. M. I. A definição de número: uma hipótese sobre a hipótese de Piaget. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, v. 87, n. 216, p. 1-20, 2006.

NOGUEIRA, C.; BELLINI, M.; BURGO, O. A construção do conceito de número na perspectiva piagetiana: o que pensam os professores. *Teoria e Prática da Educação*, v.10, p. 349-361, 2007.

PIAGET, J. A Construção do Real na Criança. Rio de Janeiro: Zahar, 1970a.

PIAGET, J. O Nascimento da Inteligência na Criança. Rio de Janeiro: Zahar, 1970b.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

PICA, P. et al. Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, v. 306, p. 499-503, 2004.

PINEL, P. et al. Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage*, v. 14, p. 1013-1026, 2001.

PINKER, S. *The language instinct*: how the mind creates language. New York: Harper Perennial, 1994.

PRADO, P. S. et al. Contagem e equiparação de conjuntos: um estudo correlacional. In: PINHO, S. Z.; SAGLIETTI, J. R. C. (Org.). *Núcleos de ensino*. São Paulo: Editora UNESP, v. 3, p. 348-372, 2006.

PRADO, P. S.T. *Ensinando o conceito de número*: contribuições do paradigma de rede de relações. 2001. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2001.

PRADO, P. S. T. Números e linguagem. In: CARMO, J. S.; PRADO, P. S. T. (Org.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. Santo André: Esetec Editores Associados, 2010, p. 273-303.

ROSSIT, R. A. S.; GUALBERTO, P. M. A. Avaliação e planejamento para o ensino do comportamento de manusear dinheiro. In: CARMO, J. S.; PRADO, P. S. T. (Org.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática.* Santo André: Esetec Editores Associados, 2010, p. 227-252.

SAPIR, E. *Language*. New York: Harcourt, Brace, 1921.

SEIDL-DE-MOURA, M. L. (Org.). *O bebê do século XXI e a psicologia em desenvolvimento*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2004, v. 1, p. 292.

SIDMAN, M. Reading and auditory-visual equivalences. *Journal of speech and hearing research*, v. 14, p. 5-13, 1971.

SIMON, T. J.; HESPOS, S. J.; ROCHAT, P. Do infants understand simple arithmetic? a replication of Wynn. *Cognitive development*, v. 10, n. 2, p. 253-269, 1995.

SKINNER, B. F. *O comportamento verbal*. São Paulo: Cultrix, 1978.

SPELKE, E. S. Nativism, empiricism, and the origins of knowledge. *Infant Behavior and Development*, v. 21, p. 181-200, 1998.

SPELKE, E. S. What makes humans smart? In: GENTNER, D.; GOLDIN-MEADOW, S. *Advances in the investigation of language and thought*. Cambridge: MIT Press, 2003.

STANFORD Encyclopedia of Philosophy. *Plato on Knowledge in the* Theaetetus. 2005. Disponível em:<http://plato.stanford.edu/entries/plato-theaetetus>. Acesso em: 17 fev. 2009.

STANFORD Encyclopedia of Philosophy. *Wilhelm von Humboldt*. 2007. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/wilhelm-humboldt/#LatWriGenComLin>. Acesso em: 17 Fev. 2008.

STARKEY, P. The early development of numerical reasoning. *Cognition*, v. 43, p. 93-126, 1992.

STARKEY, P.; COOPER, R. G. J. Perception of numbers by human infants. *Science*, v. 210, p. 1033-1035, 1980.

STARKEY, P.; SPELKE, E. S.; GELMAN, R. Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, v. 36, n. 2, p. 97-127, 1990.

TEIXEIRA, A. M. S. Componentes verbais do repertório matemático elementar. In: CARMO, J. S.; PRADO, P. S. T. (Org.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. Santo André: Esetec Editores Associados, 2010. p. 159-172.

TEMPLE, C. M. Digit dyslexia: a category-specific disorder in developmental dyscalculia. *Cognitive Neuropsycholy*, v. 6, p. 93–116, 1989.

TRICK, L.; PYLYSHYN, Z. W. Why are small and large numbers enumerated differently? a limited capacity preattentive stage in vision. *Psychological review*, v. 101, p. 80-102, 1994.

VAN DE WALLE, G.; CAREY, S.; PREVOR, M. Bases for object individuation in infancy: evidence from manual search. *Journal of cognition and development*, v. 1, p. 249-280, 2000.

VARLEY, R. A. et al. Agrammatic but numerate. *Proceedings of National Academy of Science f the United States of America*, p. 3519-24, 2005.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R. A criança e seu comportamento. In:______. *A história do comportamento*: o macaco, o primitivo e a criança. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R. *Studies on the history of behavior*: ape, primitive man, & child. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1993.

VYGOTSKY, L. *Thought and language*. Boston: MIT Press, 1986.

WHORF, B. L. *Language, thought and reality*. Cambridge, MA: MIT Press, 1956.

WYNN, K. Addition and subtraction by human infants. *Nature*, v. 358, p. 749-750, 1992a.

______. Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive psychology*, v. 24, p. 220-251, 1992b.

______. Children's understanding of counting. *Cognition*, v. 36, n. 2, p. 155-193, 1990.

______. Do infants have numerical expectations or just perceptual preferences? *Developmental Science*, v. 2, p. 207-209, 2002.

______. Infants' individuation and enumeration of actions. *Psychological Science*, v. 7, n. 3, p. 164-169, 1996.

XU, F.; SPELKE, E. S.; GODDARD, S. Number sense in human infants. *Developmental Science*, v. 8, p. 88-101, 2005.

XU, F.; SPELKE, E. S. Large number discrimination in 6-month old infants. *Cognition*, v. 74, 2000.