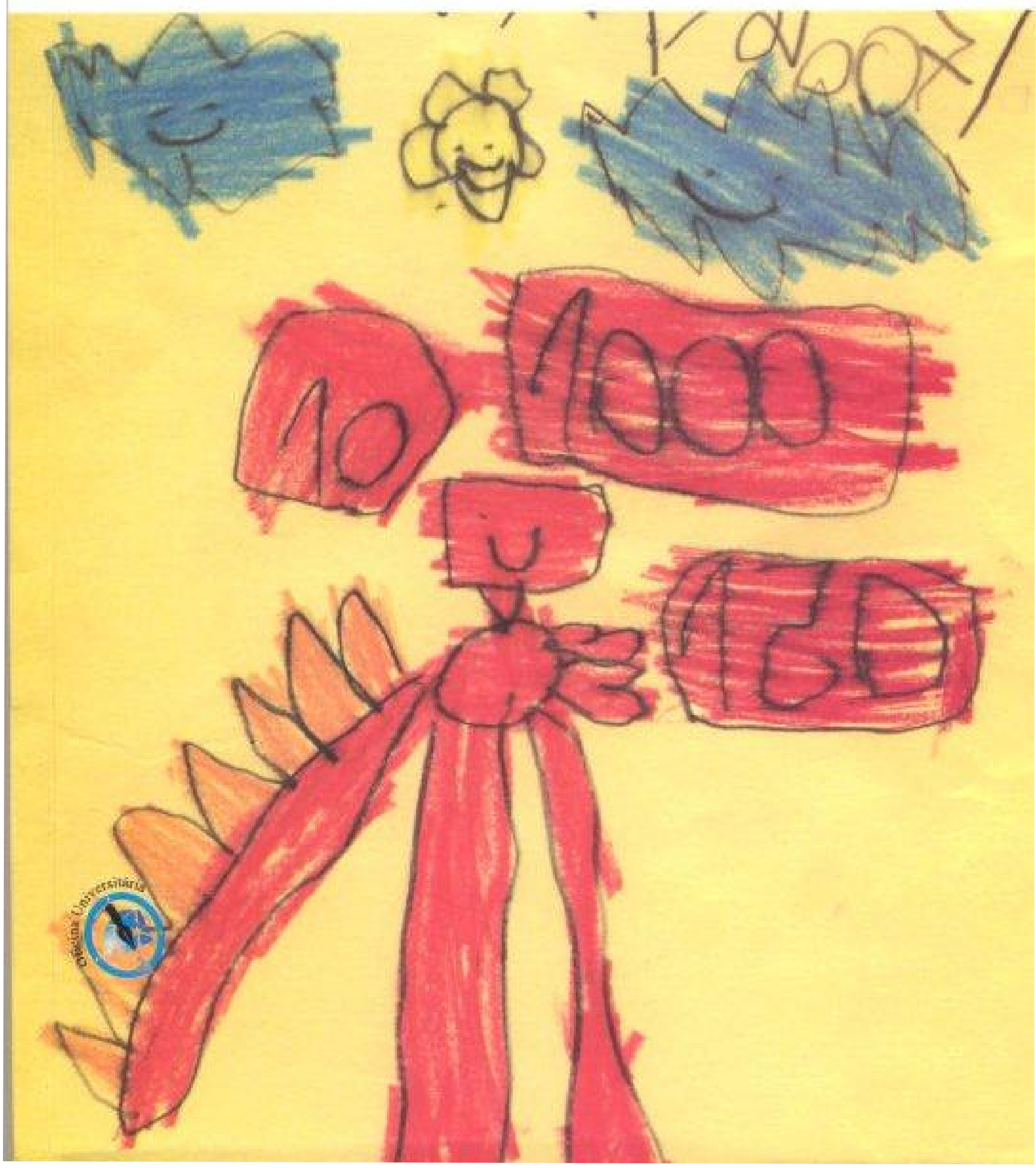
Classificação, seriação e contagem no ensino do número: um estudo de Epistemologia Genética

Clélia Nogueira



Classificação, seriação e contagem no ensino do número:
um estudo de Epistemologia Genética

Clélia Maria Ignatius Nogueira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

Diretor: Prof. Dr. Tullo Vigevani
Vice-Diretora: Dra. Maria Candida Soares Del Masso

Oficina Universitária Unesp
Antonio Carlos Mazzeo (Presidente)
Viviane Souza Galvão (Vice-Presidente)
Clélia Aparecida Martins – (DASE)
Marta Ligia Pomim Valentim (DCI)
Antonio Carlos Mazzeo (DCPE)
Maria Izaura Cação (DD)
Hugues Costa de França Ribeiro (DEE)
Marcio Benchimol Barros (DFil)
Viviane Souza Galvão (DFono)
Eliane Giachetto Saravalli (DPE)
José Geraldo Alberto B. Poker (DSA)
Maria Inês Bayer Pereira (Secretária)

Assessoria Técnica
Sonia Faustino do Nascimento da Silva (normalização)

Editoração Eletrônica e Arte Final
Edevaldo Donizeti dos Santos

Capa
Carlos Henrique de Castro Gonçalves

Produção Gráfica
Gláucio Rogério de Morais

Ficha catalográfica
Serviço de Biblioteca e Documentação – UNESP - Campus de Marília

Nogueira, Clélia Maria Ignatius
N778c Classificação, seriação e contagem no ensino do número: um estudo de epistemologia genética / Clélia Maria Ignatius Nogueira. –
Marília: Oficina Universitária Unesp, 2007.
243 p. ; 23 cm.

ISBN: 978-85-60810-00-0
DOI: https://doi.org/10.36311/2007.978-85-60810-00-0
1. Matemática – epistemologia. 2. Fundamentos da matemática. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Autor. II. Título.

CDD: 510.1

Ao João Dirceu,
que sonhou todos os sonhos comigo.

Aos meus filhos: Raul, Vitor, Lucas, Marília e Beatriz, pelas incontáveis horas de convívio que generosamente cederam para eu correr atrás de meus sonhos;
Ao professor Adrian Oscar Dongo Montoya, pela confiança e orientação segura;
À minha mãe, Sublime e à minha irmã Márcia, pelo apoio constante,

Muito obrigada

ÍNDICE

Apresentação

O Fórum Estadual Paulista sobre Formação de Educadores para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental, que teve sua origem no I Congresso Estadual Paulista Sobre Formação de Educadores, tem se reunido desde 1990, atuando no debate de questões relativas à formação dos educadores das séries iniciais do ensino fundamental.

O Fórum tem desenvolvido um percurso que pode ser mais detalhadamente visto nos documentos geradores produzidos a cada Congresso, e que explicitam a síntese das discussões ocorridas ao longo destes anos, evidenciando, assim, a importância de continuarmos a refletir sobre os projetos educacionais de formação desses professores. São reflexões que buscam produzir alternativas para que tenhamos um ensino de qualidade social, mais crítico e emancipatório, no contexto do qual os educadores sintam-se como sujeitos de seu próprio trabalho, engajados em lutas para que a sua prática pedagógica seja desenvolvida em melhores condições, nas quais estejam presentes processos coletivos que objetivem mudanças no cotidiano escolar.

Durante os nossos diferentes encontros, assumimos como objetivos:

√ Realizar pesquisas e reflexões sobre a política de formação de professores para as séries iniciais do Ensino Fundamental;

√ Aprofundar estudos e pesquisas, políticas em curso, trocas de experiências que apontem para a questão: "Que professores formar para as séries iniciais do Ensino Fundamental?";

√ Acumular conhecimentos acerca do tema, não só para avançar as discussões e tomadas de decisões no âmbito do Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores, realizado pela UNESP, mas também contribuir para o processo de aprimoramento da política, em âmbito estadual e nacional.

Mais recentemente, na continuidade da discussão do tema que orientou os debates *do VII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores: imagens e projetos* (2003), o Fórum realizou seminários mensais (de 2004 a 2005), com apresentações de trabalhos desenvolvidos por seus participantes e convidados, objetivando analisar/avaliar o ensino e as diferentes pesquisas e/ou relatos de experiência, na área de formação de professores. Tais seminários, transformados em textos, deram origem ao presente livro.

https://doi.org/10.36311/2007.978-85-60810-00-0.pi-v

Cada um dos textos, apresentados nesta publicação, foi elaborado a partir de projetos e experiências dos autores na formação de professores, buscando fornecer subsídios para que o referido Fórum tenha elementos para balizar seus debates e atuação política, a partir de categorias, conceitos e diretrizes teoricamente embasados.

O que tece os temas de cada texto numa trama mais produtora de sentidos é a contribuição de cada um na compreensão dos modos de ser educador e na natureza permanente da formação, na qual interagem tanto os processos de formação inicial, como os de desenvolvimento profissional.

São textos escolhidos, pela contribuição que dão para o aprofundamento do debate, partindo da perspectiva de que a formação inicial aligeirada, como é consoante acontecer no Brasil, deve ser substituída por uma que seja qualificada em cursos com sólida formação teórico-prática, que trate de forma indissociável a pesquisa e o ensino, a produção e a difusão do conhecimento e que ressignifique o docente como sujeito destas relações, superando a visão de um profissional que se limita ao trabalho técnico de docência.

Neste sentido, comungamos sobre a importância da formação do professor ser articulada com a de pesquisador, entendendo a pesquisa como espaço formativo para a prática docente, em que o conhecimento e sua produção circulem no fazer institucional e façam parte do projeto pedagógico a ser desenvolvido pelas escolas.

Este aspecto nos remete à importância estratégica e ética da parceria entre as universidades e as redes de ensino, na formação dos educadores, e o Fórum como espaço que busca valorizar experiências nesta parceria. Para os pesquisadores, apontamos que a escola atual constitui-se como campo de atuação do professor, devendo ser objeto de conhecimento. Além disso, o conhecimento e a interpretação desse espaço precisam ser considerados como pontos de partida e chegada das Escolas de Formação dos Professores.

A partir destas premissas, os textos apontam matrizes teóricas e caminhos metodológicos que nos parecem inovadores na perspectiva de um enfrentamento conjunto dos problemas nacionais de formação e de ser educador.

Para efeito de organização, a presente publicação orienta-se por três eixos que dão sentido aos textos:

I - Aspectos teórico-metodológicos nos projetos de desenvolvimento profissional do docente

Formação contínua em situações de trabalho: o projeto como atividade**,** de Elaine Sampaio Araújo, Manoel Oriosvaldo de Moura, Rosa Maria de Camargo e Sílvia Carvalho Araujo Tavares, condensa e explicita a organização conceitual que vem sendo construída sobre a *atividade de aprendizagem docente*, referente à formação de professores. Os autores indicam a necessidade e o esforço em construir um método dialético de estudo do fenômeno da "aprendizagem docente", buscando a compreensão deste objeto e apoiando-se em uma perspectiva leontieviana, na qual a aprendizagem do docente se dá por meio e em função de sua atividade principal, seu trabalho de organizar o ensino, seu objeto.

A pesquisa-ação como alternativa para análise da prática docente**,** de Maria de Fátima Barbosa Abdalla, relaciona-se ao percurso de professoras da Ed. Infantil e do Ensino Fundamental / Programa de Educação Continuada / PEC. Põe em evidência a metodologia da pesquisa-ação, como alternativa para analisar a prática docente, buscando compreender a sua importância como estratégia para ampliar a conscientização do professor frente aos desafios profissionais.

A Pesquisa-Ação e suas Repercussões: confrontando aprendizagens, em diferentes tempos e espaços, no processo de desenvolvimento profissional de professores, de Rinaldo Molina, pergunta: num processo colaborativo escola-universidade ocorrem aprendizagens realmente efetivas, significativas e duradouras para os processos de desenvolvimento profissional docente? Sob que aspectos? Responder a estas questões é o desafio deste texto.

II – Projetos de parcerias no desenvolvimento de capacidades pedagógicas de professores

A formação dos professores do 1º ciclo para o desenvolvimento do ensino por pesquisa no âmbito da educação para a cidadania, de Viviane Souza Galvão, apresenta o que dizem estudiosos do conhecimento sobre a natureza humana do conhecimento e sobre a necessidade da formação profissional ocorrer em uma perspectiva teórica, histórica e social. Pretende, assim, motivar uma reflexão aprofundada sobre a importância da formação continuada e em serviço voltada para o desenvolvimento de novos valores e atitudes, considerados necessários à construção de um mundo sustentável e melhor para todos.

PEC Formação Universitária – Pólo de Presidente Prudente: reflexões sobre uma experiência vivenciada, de Yoshie Ussami Ferrari Leite, Maria Raquel Miotto Morelatti e Mônica Fürkotter, tem por finalidade refletir sobre a formação de professores de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental realizada junto ao PEC – Formação Universitária. A formação, concomitante à atuação profissional dos professores, baseou-se na experiência docente dos profissionais envolvidos, assegurando articulação entre teoria e prática. Descreve o programa e faz considerações avaliativas sobre os diferentes recursos e modalidades de ensino utilizadas.

A reflexão sobre a língua como meio de superação das dificuldades de leitura e escrita – a pesquisa e a formação contínua de professores, de Stela MILLER, tem por objetivo pôr em discussão projetos dos Núcleos de Ensino da Unesp como espaços privilegiados de pesquisa e de formação contínua de professores, permitindo aos docentes refletir sobre seu trabalho, repensá-lo e buscar caminhos para encontrar alternativas para a prática pedagógica.

A avaliação contínua como meio para intervenções bem-sucedidas no processo do ensino-aprendizagem do sistema de numeração decimal, um trabalho colaborativo**,** de Ruth Ribas Itacarambi, Maria Salete Cruz, Marília Costa Basile e Silvia Maria Custodia de Souza, relata o caminho de um grupo de docentes do 1º ciclo do Ensino Fundamental, buscando viabilizar o papel de professor como investigador, na questão fundamental que são as dificuldades apresentadas pelos alunos na utilização do sistema de numeração e dos algoritmos. Tal grupo é apoiado pelo Laboratório de Educação Matemática criado junto ao Centro de Aperfeiçoamento em Ensino de Matemática: espaço de trabalho colaborativo entre professores que trabalham com Matemática no Ensino Básico e professores pesquisadores em Educação Matemática.

III- Ampliação de conhecimento sobre práticas pedagógicas

Afetividade e ensino, de Sérgio Antonio da Silva Leite e Elvira Cristina M. Tassoni, aponta que a maioria dos trabalhos realizados sobre práticas pedagógicas tem sido relacionada à dimensão cognitiva do processo, apesar de se reconhecer que a divisão cognição – afetividade é arbitrária, ou seja, que pensamento e emoção ocorrem simultaneamente. Tem, como objetivo, a partir de pesquisas realizadas em sala de aula, identificar, analisar e discutir algumas das possíveis dimensões afetivas identificadas nas mesmas.

Inclusão / exclusão – o que se pensa e o que se faz?, de Anna Maria Lunardi Padilha e Maria Cecília Carareto Ferreira, reflete que, no plano ideológico, as pesquisas evidenciam que os / as docentes são favoráveis a uma escola para todos; na prática, as pesquisas também indicam que eles se sentem pouco preparados e apoiados pelos sistemas para desenvolverem práticas educacionais para a diversidade de alunos. Neste sentido, falar de inclusão, de direito de aprender é também falar de uma didática, de um modo de organizar a aprendizagem, portanto, é falar de ensino.

As concepções de Ciência dos professores das séries iniciais do ensino fundamental e a sala de aula, de Adonai César Mendonça, parte do fato de que o ensino raramente tem sido objeto de estudos por parte dos pesquisadores, portanto, a produção acadêmica aparece incipiente neste campo. Faz um levantamento teórico sobre o assunto, apresentando um estudo exploratório acerca das concepções de Ciência de professores das primeiras séries do ensino fundamental da rede pública de São Paulo.

Esperamos, com este livro, mobilizar os leitores a aprofundarem o conhecimento do impacto da formação inicial e contínua sobre a constituição da epistemologia da prática docente, de forma a ressignificar as concepções teórico-metodológicas relacionadas às séries iniciais do ensino fundamental. Além disso, refletir sobre a pesquisa como espaço formativo e colaborativo, construindo novas referências para o professor desse nível de ensino e propondo novas dimensões curriculares para a sua formação.

Que, do aprofundamento do conhecimento teórico-prático, **propostas alternativas concretas de formação de professores para as séries iniciais sejam elaboradas,** com qualidade diferenciada da atualmente existente. Nesse sentido, nossa mensagem final é a de que a formação inicial e contínua do professor deve alterar práticas tradicionalmente excludentes das escolas, em favor de práticas mais democráticas.

Maria de Fátima Barbosa Abdalla (Coord. do Fórum)
Maria Cecília Carareto Ferreira
Sérgio Antonio da Silva Leite
Dezembro de 2005

Introdução

Quando me propus a realizar o curso de doutorado duas grandes áreas de interesse me seduziam: a Educação Matemática e a Educação Especial, particularmente, a de crianças surdas.

Tal duplicidade justifica-se: licenciada em matemática, com mais de vinte anos de experiência como professora universitária e atuando prioritariamente na área de formação e aperfeiçoamento de professores, pude constatar, inúmeras vezes, que o ensino da matemática, com uma quase unanimidade alarmante, não vem agradando a quem ensina e muito menos a quem aprende.

Por outro lado, meus estudos sobre surdez tiveram início de maneira empírica e intuitiva, mediante a observação do desenvolvimento de três crianças, de mesma idade, mesmos pais, enfim mesmo ambiente, sendo duas surdas e uma ouvinte e duas outras crianças ouvintes, mais velhas, todas elas, meus filhos.

Desde o momento do diagnóstico de surdez das meninas que aconteceu no início de 1983, entender o fenômeno foi objeto de muito estudo de minha parte.

Trabalhando em uma universidade tive condições de canalizar meus esforços e estudos para essa área, de maneira informal, pois realizei apenas um curso de especialização em Educação Especial. Todavia, como já havia concluído o mestrado (em matemática, no ano de 1979), possuía alguma experiência em pesquisa e tive acesso a livros, revistas, possibilidade de participação em cursos, congressos, contatos com professores especialistas na área. Tudo isso aliado a conversas com outros pais e principalmente, com surdos adultos, me possibilitaram penetrar no universo do surdo.

Enquanto nas reuniões de pais e professores a preocupação geral se concentrava na questão da comunicação, com ênfase na aquisição da linguagem oral, a minha inquietação, talvez devido à minha formação de professora de matemática, era o pensamento.

Freqüentemente me pegava refletindo, se quando penso falo comigo mesmo, como pensa o surdo?

Os estudos que realizava eram bastante desanimadores. Os mais otimistas apontavam para uma defasagem de cerca de dois anos para que as crianças surdas atingissem os mesmos estágios de desenvolvimento das estruturas cognitivas das crianças ouvintes. No entanto, as observações realizadas no meu "laboratório particular", formado pelos meus cinco filhos, trigêmeos (duas meninas surdas e um menino ouvinte) e dois meninos ouvintes, respectivamente, um ano e meio e três anos mais velhos que os trigêmeos, com os mesmos pais, crescendo juntos no mesmo ambiente sócio-cultural, apontavam para outras possibilidades.

Descontadas as dificuldades óbvias de comunicação, as meninas (surdas), se desembaraçavam em igualdade de condições com o menino (ouvinte) de seus desafios: juntos, começaram a comer sozinhos, ficaram livres das fraldas e aprenderam a dar nós em sapatos, mas, principalmente, tinham o mesmo interesse por livros, brinquedos e compreendiam com a mesma facilidade as regras dos jogos infantis.

Foram inúmeras as experiências realizadas com os três, baseadas quase que exclusivamente na intuição e na não aceitação da defasagem intelectual. Estas experiências me estimularam a seguir adiante.

Em 1987, depois de ter começado a estudar a teoria de Piaget (quase que exclusivamente com comentadores), desenvolvi minha primeira pesquisa formal na área: *As estruturas lógicas elementares e a noção de número em crianças deficientes auditivas: subsídios para o ensino da Matemática*, com o objetivo de analisar se a deficiência auditiva constituía um fator que comprometesse significativamente o desenvolvimento operatório lógico infantil; pesquisa esta desenvolvida em conjunto com uma professora do Departamento de Psicologia da Universidade Estadual de Maringá, meu local de trabalho. A pesquisa foi concluída em 1989.

Os resultados da pesquisa, principalmente o processo de investigação, nos levaram a pensar na possibilidade de se trabalhar com a criança deficiente auditiva independentemente da linguagem falada, propiciando condições para um desenvolvimento normal das estruturas relacionadas ao pensamento lógico matemático.

Desenvolvemos então, uma segunda pesquisa formal intitulada *O ensino de matemática para deficientes auditivos: uma visão psicopedagógica.* O da pesquisa era esboçar uma proposta de ensino de matemática que proporcionasse à criança surda uma compreensão real de seus conteúdos e de sua linguagem, proposta esta destinada inicialmente, por razões que não cabem aqui discorrer, à 5ª série. Terminada essa pesquisa, minha companheira afastou-se para o doutorado e decidi continuar os estudos e ampliar a abrangência dos conteúdos da proposta para todo Ensino Fundamental e Educação Infantil. O nosso referencial teórico sempre foi a Psicologia Genética.

Na leitura de Piaget, (novamente cometendo o erro de privilegiar o estudo com comentadores), verifiquei que para o cientista existiria um isomorfismo entre as estruturas sobre as quais repousa o edifício da matemática as estruturas constituintes da própria inteligência e, assim, entendia que a matemática seria uma espécie de formalização do pensamento humano.

Minha crença era a de que sendo a matemática a forma como a inteligência aborda o mundo conhecendo-o mediante os processos simultâneos de assimilação e acomodação (adaptação), seria necessário oferecer às crianças atividades diversificadas, de maneira a promover o desenvolvimento da inteligência.

Minha hipótese (e esperança) era de que, trabalhada adequadamente, a matemática poderia promover as condições apropriadas à construção das estruturas cognitivas, pela atividade incessante do sujeito com o real, já que esta disciplina é construída mediante ações exercidas sobre objetos, não de uma forma material, mas por relações estabelecidas em nossa mente.

Além disso, diversos pesquisadores, (Feldman, Furth, Óléron, Ogilview, Wohlwill, Lowe, entre outros), constataram que a lenta maturação intelectual do surdo geralmente se deve, entre outros fatores, à sua insuficiente aprendizagem dos números.

Em vista do exposto, acreditei poder unir minhas duas áreas de interesse e, como projeto inicial de tese, minha intenção era elaborar uma proposta de ensino de matemática para surdos. Uma proposta que não apenas proporcionasse a compreensão dos conceitos intrínsecos à disciplina, mas e principalmente, com relação à Educação Infantil, que proporcionasse às crianças surdas um desenvolvimento cognitivo compatível com sua idade e condições.

Durante a entrevista de admissão para o doutorado o meu então futuro orientador questionou minha proposta em diversos aspectos, enfatizando particularmente a tentativa de “reproduzir” a construção natural da inteligência, baseada no fato de que a “matemática seria a própria formalização do pensamento humano”, além do fato de estar propondo “mais uma” aplicação de Piaget ao ensino de matemática.

A sugestão de meu professor orientador foi então a seguinte: primeiro estudar Piaget, agora diretamente, sem comentadores, depois analisar as principais propostas de aplicação da teoria piagetiana ao ensino da matemática, para então, reavaliar minha intenção inicial de trabalho.

Mergulhei fundo na obra de Piaget, especificamente nas que se relacionavam com meu centro de interesse, a matemática e nas que tratavam da construção da inteligência. À medida que ia aprofundando os estudos, pude perceber que a tentativa de “reproduzir” as estruturas da inteligência, mediante o trabalho pedagógico com as estruturas da matemática, embora não de maneira explícita, já havia sido tentada pelo movimento *matemática moderna*, sem nenhum sucesso.

Além disso, ao delimitar o estudo para o caso particular do número, pude observar que dentre as diversas sugestões metodológicas para o “ensino” do número, baseadas na teoria de Piaget, alguns equívocos foram cometidos. Como principal equívoco, destacamos que muitas dessas propostas apresentam o inconveniente de sugerir uma seqüência linear para a construção do conceito de número, no sentido de aparecer primeiro a classificação, depois a seriação e, finalmente, como síntese, o número.

Estes dois fatores, além de uma incursão na história e na filosofia da matemática, pois segundo Piaget, é mediante a comparação sistemática entre a psicogênese das noções e seu desenvolvimento nas ciências que se pode chegar a conclusões epistemológicas verdadeiras, motivaram uma alteração *copernicana* em meu projeto original. O eixo de meu projeto de tese passou da questão da surdez para a do ensino da matemática, particularmente, para o desenvolvimento das noções matemáticas na criança e, em especial, para a *construção do conceito de número.*

Assim, o objetivo geral da minha tese foi estudar o desenvolvimento das noções matemáticas na criança, em particular a de número, segundo a epistemologia genética e analisar como os resultados de Piaget têm sido utilizados no contexto escolar.

Para isso foi realizada uma análise do contexto teórico no qual Piaget e Szeminska realizaram seus estudos; "desvendamos" todos os "possíveis mistérios" do livro *A gênese do número na criança* e estudamos algumas das atuais pesquisas acerca da construção do número na criança, relacionando-as com os resultados piagetianos.

Como na defesa da tese tive a recomendação explícita da banca para transformá-la em texto com o intuito de publicação, dediquei-me a este novo projeto.

As alterações realizadas não foram profundas. Apenas retiramos algumas partes muito específicas, de interesse maior aos pesquisadores piagetianos, mas que são encontradas em textos do próprio mestre e me aprofundei mais[1] nas questões acerca do papel da contagem na construção do número.

O presente texto contém três capítulos: I - **A evolução do ensino da matemática: suas conquistas e seus problemas**; que interessa particularmente aos leitores envolvidos com questões do ensino e da aprendizagem da matemática; II - **Evolução, fundamentos e futuro das idéias matemáticas**; embora interesse muito aos professores de matemática, por tratar da história e da filosofia da matemática, este capítulo é interessante para todos os *piagetianos*, pois possibilita entender o contexto teórico no qual Piaget estava inserido, além de permitir o estabelecimento de uma "hipótese sobre a hipótese" de Piaget para a definição de número; III - **A investigação psicogenética e o número**, este capítulo deixa claro, a construção sincrônica e solidária das classes, das séries e do número, estabelecendo os relacionamentos dois a dois: classe-série e recíproca; classe-número e recíproca e série-número e sua recíproca.

[1] Embora ainda não de maneira suficiente, pois o tema demanda pesquisas específicas.

Nos **Comentários finais** são apresentados: um resumo do que foi tratado; alguns comentários à guisa de conclusão e indicativos de como se conduzir um trabalho pedagógico com o número na Educação Infantil.

Para a compreensão do texto, especialmente no que se refere ao terceiro capítulo é interessante a leitura conjunta da obra de Piaget e Szeminska *A gênese do número na criança*, pois são comentadas as provas realizadas pelos autores sem uma descrição minuciosa das mesmas.

Finalmente, espero que este trabalho seja útil tanto aos professores de matemática e da Educação Infantil como aos estudiosos de Piaget, mas que, principalmente pelo fato de que a compreensão do complexo percurso da construção do número pela criança não está, absolutamente concluída, motive outras pessoas a enveredarem pelo fascinante mundo da pesquisa!

CAPÍTULO 1

A evolução do ensino da matemática: conquistas e problemas

Dividido em quatro tópicos este capítulo aborda questões relacionadas ao ensino de matemática, a saber:

1.1 Introduzindo a questão: apresenta uma pequena digressão histórica sobre o ensino de matemática para depois aprofundar um pouco mais no estudo do primeiro grande movimento de renovação do ensino da matemática, o *movimento da matemática moderna*.

1.2 O movimento da matemática moderna: o movimento de matemática moderna é enfatizado em função da sua contemporaneidade com os trabalhos piagetianos e pela adoção, tanto pelos modernistas, quanto por Piaget, da concepção estruturalista da matemática dos Bourbaki definindo, mesmo que *a posteriori*, uma aproximação entre o movimento renovador e a epistemologia genética.

1.3 O movimento renovador e as idéias piagetianas: é dedicado à análise de algumas propostas metodológicas fundamentadas na teoria de Piaget (não se restringindo às vinculadas ao movimento renovador). Para isso, é realizado um breve apanhado histórico sobre a evolução do ensino de número. É aqui que começamos a discussão da proposta deste texto, acerca da primazia das atividades lógicas sobre as numéricas no trabalho com número na Educação Infantil. A idéia de que haveria um estágio eminentemente lógico antecedendo à construção do número é uma interpretação equivocada da teoria de Piaget. Esta idéia parece ter sido a principal responsável para que atividades numéricas, como por exemplo, a contagem, fossem praticamente banidas da Educação Infantil a partir da reforma de 1970, enfatizando-se de início atividades que privilegiassem as classificações, seriações e a equivalência numérica por meio de correspondências (com recomendações explícitas para que não se incentivasse o uso da contagem).

1.4 Para além de Piaget?: comenta algumas das recentes pesquisas e propostas metodológicas sobre a construção do conceito de número que se centram quase que exclusivamente num resgate à contagem, procurando verificar se os resultados encontrados e as sugestões apresentadas pelos pesquisadores ultrapassam, do ponto de vista teórico, o estágio alcançado pelos pesquisadores do Centro Internacional de Epistemologia Genética. A escolha do título para este tópico é uma alusão à denominação

– Para além de Piaget. - dada pelo psicólogo e matemático francês Remi Brissiaud, à terceira e última parte (contendo sugestões metodológicas para o ensino do número fundadas na teoria de Vygotsky) de seu livro: *Como as crianças aprendem a calcular,* na qual, claramente afirma que os diversos estudos atuais acerca da contagem, ultrapassam Piaget.

1.1 Introduzindo a questão

A importância da disciplina matemática na educação de crianças e jovens parece hoje inquestionável. Integrando o conjunto de disciplinas que compõem o núcleo comum a matemática faz parte dos currículos escolares da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e Médio. Atualmente, na Educação Fundamental de todos os países do mundo a carga horária destinada à matemática é igual ou superior à das demais disciplinas. Entretanto, nem sempre foi assim.

A matemática tem suas primeiras manifestações ainda no período paleolítico, manifestações estas que se ligavam diretamente às necessidades práticas do contexto social acarretando que, enquanto conhecimento, passasse por momentos de importância qualitativamente diferentes durante o seu longo desenvolvimento. (MIORIM,1998)

Assim também ocorre com o seu ensino. Sua maior ou menor ênfase está estreitamente ligada à importância desfrutada pela matemática em determinado contexto social.

Num passado não muito distante, se uma criança devia ou não aprender matemática dependia da profissão para a qual estava sendo preparada. Durante o período colonial americano foram organizadas escolas especiais para treinar os alunos nas habilidades de calcular, porque a Companhia Holandesa das Índias Ocidentais precisava de homens treinados em cálculos para serem encarregados de seus negócios. Naquele contexto, ser um hábil calculista não era considerado nada mais do que um simples ofício.

Para a aristocracia do período colonial americano (tal como na Grécia Antiga, onde apenas a Geometria era valorizada), uma pessoa que soubesse calcular servia apenas para desempenhar funções menos importantes, ao contrário da leitura e da escrita, que eram consideradas imprescindíveis e seu ensino exigido por lei nos Estados Unidos desde 1679. A aritmética, por seu lado, permaneceria ausente dos currículos escolares americanos durante um longo período.(D'AUGUSTINE,1976)

Na Europa, por outro lado, em cursos intitulados *Lições de Pedagogia,* ministrados durante a segunda metade do século XVIII aos estudantes da Universidade de Königsberg, o filósofo alemão Emmanuel Kant evidenciava a importância do ensino de matemática às crianças. Esse ensino era importante, de acordo com Kant, não apenas pelo conteúdo intrínseco e utilidade prática da matemática, mas, também, pela sua contribuição à memória. Por ser uma ciência ao mesmo tempo rigorosamente dedutiva e que se adapta exatamente à experiência a matemática se apresentava para o grande filósofo, do ponto de vista pedagógico, como a única disciplina capaz de proporcionar aos aprendizes a possibilidade da "união entre o saber e a capacidade", entre a razão e a experiência:

> Na instrução da criança é preciso unir pouco a pouco o saber e a capacidade. Entre todas as ciências parece que a Matemática é a única para se obter da melhor maneira essa finalidade. (KANT, 1996, p.70)

Fica evidente que apesar do avançado estágio de desenvolvimento científico-cultural da época, a matemática ainda não era considerada uma disciplina *necessária* na educação infantil.

A educação infantil até então, era realizada a domicílio, por professores particulares, sendo que na sua grande maioria, as primeiras escolas criadas eram destinadas a adultos e não tinham por objetivo ensinar os rudimentos escolares, ao contrário, poderiam ser caracterizadas como grupos de estudos orientados.

As primeiras informações "confiáveis" com relação à criação de escolas as quais deram origem posteriormente às universidades datam do século VIII d.C., com a criação de escolas religiosas durante o reinado de Carlos Magno (768 – 814). O mesmo continuou acontecendo na corte de Alfredo, o Grande, no século seguinte. (SILVA, 1992)

A intenção de Carlos Magno era elevar o nível educacional do clero que, em seu reino, era constituído na sua maioria por analfabetos, para não ficar atrelado à direção da Igreja em Roma. Além disso, em virtude do enfraquecimento do sistema feudal e do desenvolvimento comercial e artesanal dos burgos, o monarca planejava, também, a escolarização das crianças urbanas e das camponesas que morassem nas cercanias dos mosteiros.

> Uma das idéias do monarca era que, uma vez alfabetizados, os religiosos pudessem compreender e ensinar devidamente a fé cristã. E, desse modo, o clero poderia ajudar no domínio de seu vasto império, subjugando, via religião – ao lado de seus exércitos – a, crescente população dos burgos e cidades episcopais. (SILVA, 1992, p.16)

Assim, a partir do reinado de Carlos Magno, no século VIII, e, nos séculos IX e X, em virtude das transformações sociais e econômicas pelas quais atravessava todo o Ocidente, as escolas religiosas e as dos Palácios (destinadas à nobreza e seus filhos) foram ampliadas. Nos séculos seguintes, devido ao aprofundamento das mudanças nas estruturas econômico-sociais do velho continente, essas escolas deram início ao florescimento das universidades européias (SILVA, 1992).

Com a pressão da burguesia passaram a surgir “escolas livres”, isto é, locais fora das igrejas. A criação de escolas era simples: bastava existir um professor para que os alunos aparecessem e estava criado *um centro de estudos*. Por volta do século XII começaram a surgir associações de mestres e discípulos que ficaram inicialmente conhecidas como *studia* e, posteriormente, devido ao seu significado universal passaram a ser chamadas de *studia generalia*. Os mais famosos *studia generalia* foram os de Bologna na Itália e os de Paris, na França.

No século XIII aconteceu a criação dos *Estudos Gerais de Lisboa* que depois foram transferidos para Coimbra e se transformaram na Universidade de Coimbra. É nessa Universidade que se formaram os primeiros docentes do curso de Matemática da Academia Real Militar da Corte do Rio de Janeiro, a primeira escola de Matemática do Brasil, fundada em 1810.

O nível do ensino de Matemática no Brasil, no início do século XIX, pode ser depreendido da decisão da Corte, de 22 de junho de 1809. Nessa decisão ficava estabelecido que a cadeira de álgebra, aritmética e trigonometria, cuja criação na Corte era recomendada pela Carta-Régia de 19 de agosto de 1799, era destinada a pessoas que desejassem distinguir-se nas diferentes ocupações e empregos da sociedade, de caráter científico ou mecânico (CARVALHO, 2000).

> [...] convém pelo menos que os seus elementos ou primeiros ramos, como são a aritmética, a álgebra, a geometria teórica e prática se tornem vulgares, e constituam uma das primeiras instruções da mocidade; por este justificado motivo se deve criar a dita cadeira, na qual se ensinará aritmética e álgebra até equações do 2º grau, inclusivamente; a geometria teórica e prática e trigonometria. Este professor ensinará o cálculo numérico provisoriamente com o algébrico, tanto das quantidades inteiras como fracionárias; a resolução das equações algébricas do 1º e 2º grau; e formação de potências, e extração de suas raízes; a teoria das proporções e progressões; regra de três simples e composta, direta e inversa, as de sociedade, de liga e falsa posição, terminando o ensino de aritmética e álgebra com a resolução dos diferentes problemas de mais uso no comércio, como são os que pertencem a juros ou interesses, etc., e com explicação do uso das tábuas de Price, insertas no tratado das pensões vitalícias de Saint Cirau, publicadas em português. No ensino da geometria teórica[...]. (CARVALHO, 2000, p.91 e p.92)

A decisão estabelecia também os conteúdos programáticos para a geometria teórica e prática. É interessante destacar que a seqüência recomendada para a apresentação dos conteúdos era: primeiro a parte teórica, depois as aplicações práticas, que ainda está presente na maioria dos livros didáticos.

Até 1808 eram proibidos no Brasil: a circulação de jornais, as escolas superiores, a impressão de livros e panfletos, bem como a existência de gráficas (SILVA, 1992).

A implantação das primeiras escolas no Brasil aconteceu por intermédio dos padres da Companhia de Jesus e pela política colonizadora iniciada pelo rei D. João III. As primeiras escolas foram a da Bahia, criada pelo padre jesuíta Vicente Rijo Rodrigues, em 1549, e a de São Vicente criada pelo padre Manuel da Nóbrega em 1550. A escola de São Vicente destinava-se à instrução de doze órfãos trazidos de Portugal e nela, assim como na da Bahia, não havia aulas de matemática; era apenas ensinado a ler e a escrever.

As primeiras aulas de matemática no Brasil foram ministradas em 1572, no Colégio da Bahia, uma instituição inaciana. O curso, embora fosse denominado *Curso de Artes*, era de ciências naturais e nele se estudava, durante três anos, matemática, física, ética e metafísica. O curso era de nível superior e graduava bacharéis e licenciados. Em 1573 os jesuítas inauguraram o Colégio do Rio de Janeiro e ali teve início um curso onde se ensinava a ler e escrever os algarismos e as quatro operações algébricas.

Outras ordens religiosas que se encontravam já estabelecidas no Brasil também iniciaram a oferta de aulas em seus conventos, entretanto, fossem inacianas ou não, as escolas existentes no Brasil destinavam-se apenas a alunos do sexo masculino.

Também existiram no Brasil, a partir da segunda metade do século XVI, classes particulares, não vinculadas a escolas ou colégios, dirigidas por professores não religiosos. A primeira delas surgiu no Rio de Janeiro em 1578, dirigida pelo escrivão Francisco Lopes e ensinava as quatro operações. Pernambuco e São Paulo passaram a ter classes particulares a partir de 1585, mas “em todas elas, o reino da Matemática não ia além das quatro operações algébricas” (SILVA, 1992, p.34).

> Apesar dessas iniciativas, a educação no Brasil é conduzida pelos jesuítas até a sua expulsão em 1759, pelo marquês de Pombal, e se caracterizava pela ênfase a uma cultura clássica e humanística, sendo a matemática ensinada como simples ferramenta necessária para as necessidades imediatas do dia-a-dia. (CARVALHO, 2000, p.91)

As reformas no ensino brasileiro tiveram início com a reforma pombalina em Portugal e, com a chegada de D. João VI, em 1808, o Brasil foi descoberto de fato, proporcionando um grande impulso nas questões educacionais. A matemática tornou-se obrigatória em todos os níveis de ensino no Brasil em 1826, com a reforma Januário Cunha Barbosa, que organizou o ensino, dividindo as escolas em pedagogias, liceus, ginásios e academias.

De um modo geral, podemos então dizer que por volta de 1800 a matemática já era ensinada nas escolas da maioria dos países do mundo, porém este ensino consistia, basicamente, de como resolver problemas mediante o uso de regras. Os livros dessa época não se destinavam a ensinar crianças e continham um grande número de problemas e regras relativas a negócios e ao comércio. Raramente se ensinava algo além de contagem e operações com números pequenos a crianças menores de dez anos.

O caráter dos livros de matemática começou a mudar em torno de 1820, com o método de apresentação do assunto partindo do concreto ao abstrato, sem enfatizar a simbolização, que era feita posteriormente. Havia a preocupação em motivar os alunos com a introdução de conceitos por meio de problemas aplicados.

Os currículos de matemática no Brasil e no mundo, nos fins do século XIX, em função da *crise dos fundamentos,*[2] receberam influências de duas concepções divergentes sobre a disciplina e que ainda hoje são fortemente presentes: a de *disciplina formal* e a de *disciplina de caráter indutivo.*

Os defensores da *disciplina formal* acreditavam que a mente da criança poderia ser desenvolvida mediante um treino intensivo por meio de exercícios repetidos, como a utilizada pelo popular *Método Kumon*, e os seus opositores apregoavam que se chegava aos conceitos aritméticos de maneira *indutiva*, por meio do uso de objetos e não pela aplicação de regras.

No começo do século XX começou a preocupação com a aplicação dos conteúdos escolares à vida real dos adultos, o que gerou abusos tais como ensinar juros e taxas para crianças do então ensino primário.

No final dos anos 20 do século XX, iniciou-se a preocupação com a idade mental adequada à aprendizagem de alguns tópicos de matemática. Inúmeros estudos foram feitos acerca do desenvolvimento cognitivo das crianças, estudos estes que exerceram enorme influência nos currículos escolares nos vinte anos seguintes, embora diversas pesquisas provassem que o lugar e a época em que determinado tópico deveria ser colocado dentro do currículo dependia da maneira como ele ia ser ensinado (D'AUGUSTINE, 1976).

Embora com algumas alterações, os currículos atuais refletem o modelo daquela época, com os seis primeiros anos do Ensino Fundamental enfatizando a aritmética e os dois últimos apresentando a álgebra e os fatos mais simples da geometria indutiva. O Ensino Médio continua com a álgebra, a geometria é a dedutiva e aparece a trigonometria. As mudanças ocorridas, principalmente as baseadas em estudos sobre a criança, tiveram caráter mais metodológico deixando fixos os conteúdos curriculares.

---

[2] A crise dos fundamentos da matemática é tratada no capítulo II.

Pesquisas evidenciaram que as crianças melhoravam a sua aprendizagem quando os conteúdos eram trabalhados a partir do concreto para o abstrato, fato que motivou o uso de muito material manipulável, os *materiais concretos,* no ensino de matemática. Outras pesquisas determinaram que, os problemas deveriam *aproveitar as experiências anteriores da criança*; outras ainda indicaram que a aritmética requeria um período de tempo maior para ser compreendida, dando origem ao *ensino em espiral*.

Diversos foram os movimentos pela reformulação do ensino de matemática a partir de 1920, tais como o *movimento progressivo*, o movimento dos *defensores da Gestalt*, movimento em favor do *ensino pela compreensão* e, o mais importante deles, o movimento da *matemática moderna.*

O *movimento progressivo* buscava atender às necessidades da criança utilizando-se de experiências significativas para a mesma. Embora esta metodologia tenha sido abandonada por ocasionar muitas lacunas na aprendizagem da aritmética, ela deixou um legado importante: o de que a criança *quando está motivada aprende melhor*. A experiência do *movimento progressivo* deve servir de alerta para as atuais recomendações de *contextualizações*. Nem tudo pode ser contextualizado e se não forem tomadas precauções, podem surgir lacunas.

Depois de 1920 chegaram os defensores da *Gestalt*. Para esses estudiosos a organização da aprendizagem deve basear-se na percepção total, centrando-se mais no todo que nas partes. O aspecto positivo que ficou desse movimento foi a consciência de que *é preciso menos repetição para dominar os conceitos quando a situação é significativa*.

A partir de 1930 cresceu o movimento em favor do *ensino pela compreensão* e, junto com a situação significativa, recomendava-se desenvolver uma habilidade.

1.2 A MATEMÁTICA MODERNA

Durante as décadas de 50 e 60 do século XX o ensino de matemática, em diferentes países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como *matemática moderna.*

Esse movimento será estudado de forma mais detalhada que os demais, pois parece ter sido o fato de Piaget e alguns dos seus colaboradores serem partidários desse movimento, a principal das razões que motivaram diversas tentativas de se fundar, na teoria piagetiana, uma didática para a matemática.

A constatação de que o ensino de matemática apresentava problemas e necessitava de reformulações não era nenhuma novidade e desde o século XIX, discussões e estudos sobre o tema eram realizados. Tais atividades foram intensificadas a partir das décadas iniciais do século XX e ficaram registradas em inúmeras publicações a respeito como a citação abaixo de autoria de dois grandes matemáticos contemporâneos que, apesar de publicada em Madri no ano de 1967, a original, publicada nos Estados Unidos data da segunda metade da década de quarenta.

> Há mais de dois milênios, uma certa familiaridade com a Matemática é considerada como parte indispensável da formação intelectual de uma pessoa culta. Atualmente, sem dúvida, se encontra em grande perigo o posto tradicionalmente ocupado por esta disciplina na educação, infelizmente, alguns dos profissionais que a representam compartilham a responsabilidade por tal situação. O ensino de Matemática tem se degenerado, freqüentemente, num vazio treinamento de resolução de problemas que, se pode desenvolver uma habilidade formal, não conduz, em troca, a uma compreensão efetiva nem a uma maior independência intelectual. A investigação matemática mostra uma tendência para a super especialização e para uma excessiva insistência no abstrato; as aplicações e conexões com outros campos do saber têm sido descuidadas. Sem dúvida, tal estado de coisas não deve justificar uma política de retraimento. Ao contrário, a reação oposta pode e deve partir daqueles que se sentem conscientes do valor intelectual da disciplina. Professores, estudantes e público culto pedem uma reforma construtiva e não uma resignação seguindo a linha da menor resistência. A meta será uma verdadeira compreensão da Matemática como um todo orgânico e como base para o pensamento e a ação científicos. (COURANT; ROBBINS, 1967, p.ix)

No princípio da década de 50 e mesmo antes, já existia o consenso de que o ensino de matemática malograra e não estava atendendo a quem ensinava e, menos ainda, a quem aprendia.

Como acontece ainda hoje com pessoas adultas que por pelo menos durante 11 anos estudaram matemática, os adultos daquela época pouco ou nada retinham do conteúdo estudado a não ser nomes famosos como *Teorema de Pitágoras*, apesar de não se recordarem do enunciado, ou fórmulas exaustivamente memorizadas sem a devida compreensão, como a do quadrado da soma de dois números reais quaisquer, x e y, dada por: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, sem falar, é claro, na total incapacidade de operar com frações, conteúdo que aparece na terceira série e acompanha o indivíduo nos oito anos restantes. Essa situação faz com que muitos afirmem que nada sabem de matemática, o que é, evidentemente um exagero.

Quando os Estados Unidos entraram na Segunda Guerra Mundial ficou patente para os militares que os soldados pouco sabiam de matemática e foram instituídos cursos especiais para melhorar seus desempenhos. Tal fato motivou a necessidade de se "reformar" o ensino de matemática e embora sejam muitos os fatores envolvidos em qualquer atividade de ensino, os grupos que empreenderam a reforma se concentraram no currículo, acreditando que se este fosse melhorado, todo o ensino teria êxito.

Estes grupos de reformas eram integrados por matemáticos profissionais os quais verificaram que as escolas de todos os países tratavam ainda das noções mais antigas da matemática, em particular, da matemática grega. Como o conhecimento mais recente existente nos programas de matemática escolar datava de no mínimo 200 anos, ficou evidente que as conquistas mais recentes da matemática não estavam contempladas nos currículos.

O conflito político entre Rússia e Estados Unidos, particularmente, ao final da década de 50, influenciou intensamente a educação na década seguinte. No outono de 1957 os russos lançaram seu primeiro satélite artificial, *o Sputnik*. Este fato convenceu o governo norte–americano e todo o país, de que os Estados Unidos estavam atrasados em relação aos russos em ciências e em matemática.

Na verdade, o que ficou enfatizado foi o fato de que a educação intelectual não recebia a ênfase necessária, com a valorização excessiva da memorização e do treinamento, em detrimento da compreensão e criatividade.

Foi neste momento que os americanos "descobriram" Piaget e começaram a interpretá-lo com o objetivo de acelerar o processo de desenvolvimento e desenvolver a criatividade (GOULART, 1998, p.11).

Como quase sempre acontece na história da educação, eventos externos obrigaram os educadores a revisar suas práticas e a ultrapassar seus preconceitos. A corrida espacial estimulou o fomento das agências governamentais americanas e surgiram muitos grupos interessados em criar um novo currículo para a matemática, incrementando assim, o *movimento moderno*.

Não há consenso quanto à pertinência do nome "matemática moderna" e para alguns estudiosos seria mais apropriada a expressão "matemática revolucionária", porque envolveria muitas características que normalmente são associadas a uma revolução. (D'AUGUSTINE, 1976, p.xxi)

> Para outros estudiosos a expressão 'matemática moderna' seria apropriada, pois a principal mensagem dos grupos que trabalharam na mudança curricular era a de que o 'ensino de matemática tinha malogrado porque o currículo tradicional oferecia 'matemática antiquada', que era como se referiam à matemática criada antes de 1700'. (KLINE,1976, p.34)

É preciso ficar claro que não foram apenas os fatores externos, tais como o lançamento do *Sputnik* ou o rápido desenvolvimento da sociedade técnica nos anos 50, cujo mercado necessitava de pessoas com boa preparação em matemática que caracterizava a urgência de uma nova postura frente ao ensino desta disciplina. Fatores *internos* ou pedagógicos vinham, desde os anos 20, instigando os profissionais da área a buscarem mudanças. Podem ser considerados fatores favoráveis ao começo da "revolução":

- Informações contínuas sobre o modo pelo qual as crianças aprendiam.
- Melhor conhecimento da estrutura básica da matemática.
- Tentativas bem sucedidas de unificar os conhecimentos matemáticos.
- Reconhecimento de que a continuidade do ensino nas diferentes séries não era o suficiente.
- Reconhecimento de que o ensino da aritmética era totalmente orientado para desenvolver habilidades de computação.

- Reconhecimento de que a seqüência no ensino da matemática era mais histórica do que lógica.
- Reconhecimento da sociedade de uma maior competência em matemática.
- Reconhecimento do melhor preparo do professor. (D'AUGUSTINE, 1976, p.xxi)

Por se restringir às mudanças curriculares, a reforma realizada pelo movimento da *matemática moderna* consistiu, basicamente, em se substituir conteúdos tradicionais por campos novos como o da álgebra abstrata, da topologia, da lógica simbólica e da álgebra de Boole. (KLINE, 1976, p.35)

A matemática a ser ensinada era aquela concebida como lógica, compreendida a partir de estruturas, que conferiram um papel importante à linguagem matemática. O que se pretendia era *diminuir a distância entre o saber ensinado e o saber da disciplina*. Era como se os alunos tivessem conhecimento do imenso fosso existente entre os conteúdos da escola e os avanços da disciplina e, por essa razão, se recusavam a aprender a matéria.

A *matemática moderna* buscava então aproximar os conteúdos escolares da matemática dos pesquisadores centrando seu ensino nas estruturas e fazendo uso de uma linguagem unificadora a *linguagem da teoria dos conjuntos*.

O estilo formalista de exposição matemática do qual o principal exemplo é a obra do grupo francês Bourbaki penetrou gradualmente no ensino da matemática mesmo em níveis mais elementares e, sob o beneplácito da matemática moderna, os textos básicos bourbakianos em nível de pós-graduação sobre a teoria dos conjuntos, a álgebra e a análise chegaram até à Educação Infantil.

Vale destacar que esta revolução no ensino da matemática partiu dos matemáticos profissionais que não concordavam com os conteúdos ensinados e por não existirem preocupações de ordem pedagógica prevaleceu a crença de que o êxito da reforma dependia apenas da mudança curricular.

Como esses matemáticos eram, na sua maioria, professores universitários, que raramente tiveram contato com a realidade do ensino de crianças e adolescentes, grande parte dessas reformas reflete a visão que o pesquisador matemático tem do que deveria ser ensinado nas escolas de Ensino Fundamental e Médio. "Nota-se, nelas, um viés para transformar essa criança ou adolescente em um matemático mirim preocupado com a exatidão, rigor e estrutura lógica da Matemática". (CARVALHO, 2000, p.102)

A esse respeito, assim se pronunciou o ministro da educação do Peru, Dr. Carlos Cueto Fernandini, na abertura da segunda conferência organizada pelo Comitê Inter Americano para o Ensino da Matemática, o CIAEM:

> O trabalho pedagógico da segunda metade do século XX está ainda derivando daquela combinação de eventos aos quais nos referimos como a revolução no ensino da matemática. Esta revolução nasceu primeiro nas mentes dos matemáticos profissionais que, cerca de 25 anos atrás verificaram que as escolas de todos os países estavam ainda tratando das noções mais obsoletas nas ciências matemáticas. O que havia de mais "novo" nos programas de matemática escolar tinha 200 anos. Mesmo hoje, a despeito de tudo ainda falhamos ao tirar vantagem das novas e maravilhosas contribuições feitas pela ciência matemática ao aperfeiçoamento do espírito humano, assim como ao nosso meio material. Se um dos aspectos essenciais da educação é a integração do homem e do sistema de conhecimento contemporâneo a ele, como podemos voltar nossas costas à matemática moderna? Como podemos mover nossos horizontes de volta ao tempo em que nada se sabia, por exemplo, da teoria dos conjuntos? (FEHR, 1969, p.15 e 16)

Os principais assuntos abordados na segunda conferência foram: a modernização do ensino de matemática, a necessidade de trazer para a sala de aula algumas das recentes conquistas da ciência matemática, a modernização dos currículos e programas, o treinamento de professores para a realidade e a produção de textos e materiais adequados ao novo enfoque.

Com a ênfase principal na introdução de novos conteúdos surgiram grupos propondo uma reforma curricular bastante radical, como o grupo internacional que se reuniu em Royaumont, França, em 1971, e recomendou que se abandonassem completamente os conteúdos da matemática tradicional, inclusive a geometria euclidiana, tendência esta acentuada pelo famoso grito de Dieudonné: *Abaixo Euclides*. (KLINE, 1976)

Os novos conteúdos eram *conjuntos*, *números*, *probabilidades*, *estatística* e *lógica*. Além disso, as concepções modernas invadiram o ensino da álgebra: operações e sistemas operacionais, conjuntos, relações e aplicações, estruturas e isomorfismos, estrutura de espaço vetorial, etc. A geometria foi algebrizada, com a introdução da geometria afim.

A preocupação com os métodos e meios começou a aparecer subordinada às questões de mudança de conteúdo, consideradas como fundamentais até então.

Devido à influência de matemáticos profissionais e como resultado de investigações realizadas em diferentes partes do mundo por especialistas qualificados, estavam, no início da década de 70, *praticamente fora de discussão* os seguintes objetivos para o ensino da matemática:

> Ensinar matemática atualizada, incluindo probabilidades, estatística e matemática numérica;
>
> Ensinar a matemática fortemente unificada por meio de conceitos básicos e das estruturas fundamentais;
>
> Desenvolver a matemática conceitual, junto com a habilidade no cálculo;
>
> Ensinar a matemática tanto como um corpo de conhecimentos abstratos, como um útil instrumento operacional;
>
> Ensinar a Matemática como uma disciplina em contínua expansão;
>
> Apresentar uma imagem clara da metodologia da matemática;
>
> Prestar atenção à motivação e desenvolvimento de atitudes positivas com respeito à matemática;
>
> Definir a matemática necessária ao cidadão médio da nossa sociedade. (UNESCO, 1972, pág. 117)

No Brasil, no início do movimento, em torno de 1950, havia grande insatisfação entre os professores de matemática devido à educação antiquada, aos programas inflexíveis determinados sem levar em conta a opinião destes. Essa insatisfação favoreceu a realização dos *Congressos do Ensino de Matemática*, organizados objetivando reunir professores de matemática de todo o país, com o propósito de desenvolver diretrizes para um plano de trabalho em comum. O *I Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática* aconteceu em Salvador, Bahia, de 4 a 7 de setembro de 1955, e teve a participação de 94 professores.

No *II Congresso*, realizado em São Paulo, em 1957, as discussões foram orientadas pela pergunta: "matemática clássica ou matemática moderna nos programas do curso secundário?" Quando da realização do *III Congresso*, no Rio de Janeiro em 1959, quase não se havia avançado nada e a maioria dos professores brasileiros ainda não conhecia a *matemática moderna*.

Nesta época e devido à insistência dos professores secundários de Matemática, vários Grupos de Estudo, Centros e mesmo Institutos foram organizados no país, para atualizar o conhecimento do professor. Por exemplo, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática de São Paulo, fundado em 31 de outubro de 1961 e o Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal da Bahia fundado em 1960.

> Os Institutos e Grupos de Estudo começaram a formar equipes de professores secundários, que podiam atualizar seus colegas, recém-graduados nas faculdades sem bom preparo, bem como professores registrados que lecionam sem ter preparo universitário. O Grupo de São Paulo, maior e melhor preparado apresentou ao IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, que se realizou em Belém do Pará, em julho de 1962, sua primeira utilização da Matemática Moderna no ensino secundário. (FEHR, 1966, p.219)

No Brasil, assim como nos demais países do mundo, o maior mérito do movimento da *matemática moderna* foi motivar o debate em torno do ensino de matemática. Foram criados diversos grupos de férias para discutir o ensino de matemática, modificando-se os programas e os livros didáticos, principais responsáveis pela veiculação do movimento, proporcionando, efetivamente, uma renovação do ensino de matemática em nosso país.

> A partir de 1961, alteram-se os programas de Matemática do ensino do 1º grau. Por um lado, temos a liberdade permitida pela Lei de Diretrizes e Bases; por outro, começam a chegar ao Brasil as propostas do chamado movimento da Matemática Moderna, com suas propostas radicais de revisão do ensino da matéria.Temos assim um movimento em direção à diversidade, com as várias Secretarias instituindo grupos específicos para estudos de currículos (laboratórios de currículos, por exemplo) e ao mesmo tempo um ponto de abstração muito forte para o qual se direcionavam essas mudanças, a Matemática Moderna. (CARVALHO, 2000, p.101)

Um outro fator importante é que o *movimento renovador* coincidiu com as mudanças políticas iniciadas pelo governo João Goulart e que atingiram seu clímax na ditadura militar. O espírito ufanista e as metas de um progresso acelerado refletiram na educação, reforçando uma tendência tecnicista direcionada pela psicologia comportamental.

> É o momento da preocupação com a formulação de objetivos operacionais, com a avaliação objetiva, a instrução programada e outras inovações de caráter didático. (GOULART, 1998, p.12)

O movimento da *matemática moderna* teve forte influência e alcançou os professores por meio dos livros didáticos.

No Brasil, como nos demais países do mundo, porém, as desilusões com a renovação não tardaram a ocorrer evidenciando que a matemática não havia se transformado em algo fácil de aprender. Alguns objetos de ensino introduzidos sofreram transformações não previstas pelos autores das reformas e as inovações realizadas não levaram à constituição de um corpo de conhecimento confiável. (PARRA; SAIZ, 1996)

A reforma dos programas simplesmente inserida na estrutura existente e sem as necessárias críticas aos objetivos do ensino da matemática no contexto social, não foi suficiente para satisfazer as exigências de uma sociedade que se apresentava cada vez mais complexa. (CARVALHO, 2000)

Em 1980, o *Conselho Nacional dos Professores de Matemática* – NTCM – dos Estados Unidos elaborou um documento intitulado *Agenda para Ação*, contendo recomendações para o ensino de matemática durante a década que se iniciava, destacando a *Resolução de Problemas* como foco da educação matemática dos anos 80. Este fato, aliado à compreensão nascente da relevância de aspectos cognitivos, lingüísticos, antropológicos e sociais no ensino da matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares.

As reformas curriculares que aconteceram em todos os países do mundo entre 1980 e 1995 se fundamentaram nessas idéias e apresentavam diversos pontos de convergência, entre os quais, destacam-se:

- direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas à aquisição de pré-requisitos para estudos posteriores;
- importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
- ênfase na resolução de problemas, na exploração da matemática do cotidiano e na interdisciplinariedade.

Wadsworth (1984) atribui à metodologia tradicional para os conteúdos novos, o fracasso da "matemática nova", nos EUA:

> A tentativa de se implementar a "matemática nova" nos Estados Unidos durante o final da década de 50 e na de 60 foi um esforço no sentido de fazer com que as crianças aprendessem um conjunto de conceitos matemáticos negligenciados pela "matemática velha". O fracasso da "matemática nova" nos Estados Unidos em grande escala provavelmente se deve ao fato de que, embora o conteúdo do ensino da matemática de certo modo mudasse, os métodos de ensino não mudaram. (WADSWORTH, 1984, p.204)

A partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas na sua implantação a *matemática moderna* teve o seu refluxo no Brasil, entretanto, estudos revelaram que até o momento da implantação dos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, os PCNs, ainda existiam currículos com características do *movimento renovador* em alguns estados brasileiros.

CARVALHO (2000) analisou os currículos de matemática de todos os estados brasileiros que possuíam propostas elaboradas entre 1985 e 1995 e constatou que era possível dividi-los em duas "Grandes Famílias", os que ainda enfatizavam a teoria dos conjuntos e os que já a eliminaram ou reduziram a um mínimo. O estado do Amazonas seria um exemplo extremo do 1º grupo, e o do Paraná, um bom exemplo do 2º grupo. Com o advento dos PCNs espera-se que em breve, em todo Brasil, as propostas curriculares estejam harmonizadas e distantes da idéia de formação do *matemático mirim*.

Em âmbito internacional as críticas à *matemática moderna* começaram a ganhar corpo durante o Terceiro Congresso Internacional sobre Educação Matemática, realizado em Karlsruhe, na Alemanha Ocidental, em 1976. A variedade e abrangência dos temas abordados e o enfoque dado às discussões revelaram uma mudança significativa no movimento da Educação Matemática. A intensa preocupação com a modernização dos currículos perdeu espaço para debates sobre a influência da vida social, o desenvolvimento da atitude de investigação no aluno, a formação do professor, a preocupação com os alunos lentos e deficientes, a relação entre matemática e linguagem, o uso de computadores, entre outros.

1.3 O MOVIMENTO RENOVADOR E AS "IDÉIAS" PIAGETIANAS

Como já comentamos anteriormente, a *matemática moderna* buscava diminuir a distância entre o saber da sala de aula e o saber da ciência que, à época, era representado pelo estruturalismo do grupo Bourbaki.

Assim, pode-se considerar o movimento apoiava-se, teoricamente, nos resultados e no estilo formalista de exposição matemática da escola bourbakista, particularmente, a possibilidade de *unificação das matemáticas* proporcionada pela *descoberta* das estruturas elementares da matemática, as estruturas-mãe. A linguagem da teoria dos conjuntos constituía-se, por excelência, na linguagem da matemática.

Contemporâneas às dos Bourbaki, as pesquisas de Piaget e seus colaboradores estabeleceram isomorfismos entre as estruturas matemáticas e as estruturas mentais do pensamento e "adotaram" estruturas próprias da matemática (a de *grupo*, por exemplo), para descrever estádios de desenvolvimento da inteligência da criança. Ao procederem desta forma, tornaram a aproximação entre o *movimento renovador* e a epistemologia genética, praticamente inevitável.

Para uma melhor compreensão desta "aproximação", convém recordar o significado de *estruturas* tanto na matemática, como na teoria piagetiana.

1.3.1 AS ESTRUTURAS MATEMÁTICAS

O tratamento dado aos objetos matemáticos muda no decorrer do desenvolvimento da ciência. Devido à proliferação e aos relacionamentos específicos entre os objetos matemáticos, eles deixam de ser pensados como *objetos isolados* e passam a serem considerados como *estruturas gerais* das quais fazem parte.

As *estruturas matemáticas* são constituídas de objetos matemáticos unidos por relações ou leis de combinação. Um exemplo de estrutura matemática, é o sistema de números inteiros, que é algo mais complexo do que números isolados. Os objetos isolados constituem os *substantivos* do discurso matemático. (DAVIS; HERSH, 1990)

Os símbolos de combinação ou de relações tais como “igual a”, “maior do que” ou os sinais de operações tais como adição, radiciação ou diferenciação, exercem um papel semelhante ao de *verbos*. (DAVIS; HERSH, 1990)

As restrições ou qualificações atribuídas às estruturas matemáticas fazem o papel de *adjetivos*, como por exemplo, grupo abeliano, comparado com grupo. (DAVIS; HERSH, 1990)

De maneira formal:

> Uma *estrutura matemática* consiste em um conjunto de objetos S, que podem ser imaginados como sendo o suporte da estrutura, um conjunto de operações ou relações, que são definidas sobre os objetos de S, e um conjunto de elementos distinguidos em S, por exemplo 0 e 1. Estes ingredientes básicos são chamados a “assinatura” da estrutura, e são freqüentemente exibidos em forma de uma lista com **n** elementos. Por exemplo: <R,+,.,0,1> significa o conjunto dos números reais combinados pela adição e multiplicação, com dois elementos distinguidos 0 e 1. (DAVIS; HERSH, 1990, p.171)

Não é tarefa fácil distinguir um objeto matemático de uma estrutura matemática, pois estes conceitos são relativos ao contexto. A diferenciação entre ambos depende da época e da utilização. Assim, se uma estrutura matemática for freqüentemente utilizada durante muito tempo e, ainda, se é adquirido todo um conjunto de experiências e intuições sobre ela, então poderá ser considerada como um objeto.

É importante perceber que quando recuamos no tempo, o que agora é considerado como um objeto matemático simples, por exemplo, um círculo, ou um triângulo eqüilátero, ou um poliedro regular, pode já ter tido o impacto psicológico de toda uma estrutura e pode ter influenciado a metodologia científica, como por exemplo, a astronomia. (DAVIS; HERSH, 1990, p.172)

Um objeto matemático considerado isoladamente não tem sentido. Sua significação provém de uma estrutura e ele representa o seu papel dentro da estrutura. (DAVIS; HERSH, 1990, 173)

> As estruturas permitem fazer divisões não muito arbitrárias no campo da matemática, como por exemplo: 'estruturas dotadas de funções-operações, chamam-se *algébricas* e a álgebra pode ser conceituada como o estudo das estruturas algébricas'. (LUNGARZO, 1990, p.81)

Os tipos de estruturas são definidos em função da natureza das relações que as determinam e, embora tal natureza possa ser bastante variada, elas podem ser abarcadas por três grandes tipos: as *estruturas algébricas*, as *de ordem* e as *topológicas*.

Uma *lei de composição* é uma relação entre três elementos de tal forma que os dois primeiros elementos determinam o terceiro de maneira única. Uma estrutura é dita *algébrica*, quando suas relações de definição são leis de composição.

> Quando as relações de definição de uma estrutura são leis de composição, a estrutura correspondente é chamada *estrutura algébrica* (por exemplo, uma estrutura de *corpo* se define por duas leis de composição, com axiomas adequados: a adição e a multiplicação dos números reais definem uma estrutura de corpo sobre o conjunto destes números). (BOURBAKI, 1962, p.42)

Uma relação R entre os elementos x e y, representada por xRy, é dita *relação de ordem*, quando satisfaz às seguintes propriedades: a) *reflexiva*: para todo x, temos xRx; b) *anti-simétrica*: se xRy e yRx, então x=y e c) *transitiva*: se xRy e yRz, então xRz. Aqui, não se supõe que a relação determine univocamente algum dos elementos x e y, em função do outro, como acontece no caso das leis de composição.

Uma estrutura é *de ordem*, quando a relação que a define, é uma relação de ordem.

> Um exemplo evidente de um conjunto munido de tal estrutura é o conjunto dos números inteiros (ou o dos números reais), substituindo o sinal R pelo sinal $\leq$. (BOURBAKI, 1962, p.43)

As *estruturas topológicas* (ou topologias) dão uma formulação matemática abstrata às noções intuitivas de *vizinhança,* de *limite* e de *continuidade* que conduzem à nossa concepção de espaço. (BOURBAKI, 1962)

1.3.2 AS ESTRUTURAS ELEMENTARES PIAGETIANAS

Para Piaget existem também três tipos de estruturas no organismo humano, as *totalmente programadas*, que possibilitam prever comportamentos que se manifestam em determinadas épocas, como a fase de maturação sexual, por exemplo; as *estruturas parcialmente programadas*, cujo desenvolvimento e construção dependem em grande parte do meio, como as do sistema nervoso e *as estruturas nada programadas*, as *estruturas mentais*, que são específicas para o “ato de conhecer”.(RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p.9)

> Sem muito rigor, uma estrutura, segundo Piaget, é um conjunto de elementos relacionados entre si de tal forma que não se podem definir ou caracterizar os elementos independentemente destas relações. Uma estrutura pode ser estática ou dinâmica; quando dinâmica, pode-se falar em ‘atividade da estrutura’. Piaget usa o vocábulo ‘funcionamento’ para aludir à atividade de uma estrutura dinâmica. (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p.13)

As estruturas mentais são as que nos interessam, pois são as responsáveis pela capacidade humana de estabelecer relações lógicas, como $A = A$; ou, que se $A<B$ e $B<C$, então $A<C$, etc. Tais estruturas não são inatas, isto é, dadas *a priori*, ao contrário, elas possuem uma gênese, surgem em “função da construção das estruturas que ocorrem na interação do organismo com o meio” sendo, por conseguinte, “uma conquista do ser humano” (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p.14).

É importante destacar que as estruturas mentais não estão constituídas *a priori* no indivíduo, num sentido cronológico (anterioridade no tempo e no espaço), entretanto, elas constituem a condição de possibilidade de todo conhecimento, isto é, são *a priori* no sentido lógico, daí o fato de se dizer que na teoria piagetiana, o *a priori* é construído.

Assim, qualquer que seja o comportamento humano, a ele está subjacente uma lógica das ações, que não é consciente para o indivíduo, mas que é em tudo isomorfa à lógica das classes e das relações lógico-matemáticas.

> Piaget, observando o comportamento da criança, percebe, com seus olhos de epistemólogo, uma lógica subjacente às suas ações, ou seja, uma estrutura subjacente ao comportamento. Constata que em qualquer tipo de

comportamento – seja no que visa a um fim imediato, seja no puramente lúdico – as ações da criança não se organizam aleatoriamente, mas, ao contrário, supõem sempre uma ordenação, uma seriação e uma classificação ou uma implicação. (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p.14)

As estruturas mentais *funcionam* então, seriando, ordenando, classificando, estabelecendo implicações e permitindo a inserção dos objetos e dos acontecimentos no tempo e no espaço.

As três estruturas fundamentais sobre as quais repousa o edifício matemático, segundo o grupo Bourbaki, seriam as estruturas algébricas, cujo protótipo é o *grupo*, as estruturas de ordem, das quais uma variedade, correntemente utilizada hoje (por outro lado, em alguns casos, com excesso), é a *rede*, e as estruturas topológicas. Este número, não é, por outro lado, exaustivo e o desenvolvimento das matemáticas poderia aumentá-lo. Porém, no estado atual de nossos conhecimentos, estas três estruturas são as únicas irredutíveis entre si e desempenham por isso, o papel de estruturas mães.

Ora, é do maior interesse comprovar que se se quer analisar até suas raízes o desenvolvimento psicológico das operações aritméticas e geométricas espontâneas na criança, e, sobretudo, as operações lógicas que constituem suas necessárias condições prévias, se encontra, em todas as etapas, primeiro, uma tendência fundamental à organização de totalidades ou sistemas, fora dos quais, os elementos carecem de significado ou ainda de existência, e em seguida uma distribuição destes sistemas de conjunto segundo três espécies de propriedades que correspondem precisamente às estruturas algébricas, as de ordem e as estruturas topológicas. (PIAGET, 1968, p.7)

E mais:

Outro exemplo do que a análise genética das operações lógico-matemáticas da criança fornece: ao procurarmos o que representam as estruturas mais gerais das operações concretas que se constituem por volta dos 7 anos (tendo por critérios psicológicos sua reversibilidade ou caráter involutivo, e os invariantes aos quais essas operações conduzem), encontramos no cerne das classificações espontâneas, seriações, correspondências, produtos cartesianos etc., três grandes estruturas: as primeiras podem ser ditas algébricas, visto que sua reversibilidade repousa sobre a inversão; as segundas são estruturas de ordem com uma inversão por reciprocidade; e as terceiras podem ser ditas topológicas, por estarem fundadas em vizinhanças e no contínuo e não mais em equivalências ou não-

> equivalências entre quantidades discretas independentes de sua posição. É difícil deixar de reconhecer nesses fatos o indício do caráter “natural” das três estruturas-mãe bourbakistas. (PIAGET, 1998, p.219)

Como Piaget estabeleceu um isomorfismo entre as estruturas matemáticas e o *funcionamento* das estruturas mentais que proporcionam o desenvolvimento da inteligência na criança e o movimento da matemática moderna recomendava que as estruturas matemáticas fossem consideradas como conteúdos escolares muitos autores estabeleceram, *a posteriori,* que o ensino da matemática moderna teria fundamentação na epistemologia genética.

> Na realidade, se o edifício das matemáticas repousa sobre *estruturas*, que correspondem, por outro lado, às estruturas da inteligência, é necessário ***basear*** a didática matemática na organização progressiva destas estruturas operatórias. (PIAGET, 1968, p.27, destaque nosso)

Na citação anterior, o destaque dado à palavra *basear* não consta no original. A intenção do destaque é mostrar que *basear* não significa absolutamente que se deva buscar reproduzir artificialmente o desenvolvimento das estruturas da inteligência e, menos ainda, que as estruturas matemáticas devessem integrar o currículo da educação infantil, mas sim, que os conteúdos ministrados deveriam ser compatíveis com este desenvolvimento.

Alguns educadores justificam o trabalho com atividades de classificação, seriação, etc.,as chamadas atividades *pré-numéricas*, como forma de acelerar o desenvolvimento da inteligência. Piaget, assim se posiciona frente a essa questão:

> [...] o problema aqui em pauta retorna à indagação sobre se existe ou não vantagem em acelerar a sucessão dos estágios do desenvolvimento. É claro que toda educação consiste, de uma forma ou de outra, em semelhante aceleração; mas a questão está em estabelecer até onde ela é proveitosa. Ora, não é sem motivo que a infância se prolonga muito mais no homem que nas espécies animais inferiores; muito provável, pois que se imponha para cada tipo de desenvolvimento uma velocidade inicial, sendo o excesso de rapidez tão prejudicial quanto a uma acentuada lentidão. (PIAGET, 1980, p.19)

O estabelecimento do isomorfismo entre a matemática bourbakista e a inteligência; o fato de Piaget fundar a lógica na psicologia genética e o apoio manifestado por ele às mudanças no ensino da matemática parecem ter motivado a falsa idéia de que os currículos da matemática moderna *reproduziriam* o desenvolvimento da inteligência descrito pelo pesquisador genebrino.

É fato que Piaget estabeleceu um isomorfismo entre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição do pensamento matemático; também é fato que para o pesquisador “o edifício da matemática repousa sobre estruturas que são as da própria inteligência”, não é verdade, porém, que a matemática moderna estivesse fundada na epistemologia genética de Piaget.

As mudanças propostas pelo movimento renovador estavam centradas na estrutura dos conteúdos e não na gênese e história. Apesar disso, os promotores da reforma apoiavam-se muito freqüentemente em citações de Piaget (PIAGET, 1998).

Ainda hoje, as propostas metodológicas apoiadas em Piaget apresentam muitas das características da matemática moderna, trocando conteúdos explicitamente apresentados como teoria dos conjuntos, cujo único objetivo era familiarizar o aprendiz com a linguagem formal da matemática, por atividades de classificação, inclusão de classes ou correspondência biunívoca. Ao considerar tais atividades como essenciais ao desenvolvimento do conceito de número, os conteúdos propostos pela matemática moderna são mantidos e o que muda são os objetivos e a forma de apresentação.

Para Piaget, todavia, não existiria uma real necessidade das atividades descritas acima para o desenvolvimento do conceito de número:

> [...] Ora, semelhante situação é tanto mais surpreendente quanto se os professores de matemática se dispusessem a tomar conhecimento da formação psicogenética ‘natural’ das operações lógico-matemáticas, descobririam que existe uma convergência entre as principais operações usadas espontaneamente pela criança e as noções que a ela se tenta inculcar pela abstração. A partir dos 7-8 anos, por exemplo, as pessoas descobrem por si mesmas operações de reunião e de intersecção dos conjuntos, assim como produtos cartesianos, e a partir dos 11-12 anos chegam a partição dos conjuntos. (PIAGET, 1980, p. 16)

Particularmente ao que se refere à questão "novos conteúdos e métodos tradicionais" na matemática moderna, assim se manifestou Piaget (1980, p.16):

> Com referência, por exemplo, ao ensino da 'Matemática moderna', que constitui progresso verdadeiramente extraordinário em relação aos métodos tradicionais, a experiência é com freqüência prejudicada pelo fato de que, embora seja 'moderno' o conteúdo ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adotar (e bastante precocemente, do ponto de vista da maneira de raciocinar dos alunos) uma forma axiomática.

Do exposto acima, pode-se auferir que o mestre suíço demonstrou preocupação com a metodologia (ou ausência dela) utilizada quando da apresentação dos conteúdos propostos pelo movimento da matemática moderna. E continua...

> Muito se pode esperar, portanto, da colaboração entre psicólogos e matemáticos para a elaboração de um ensino "moderno" e não tradicional da matemática do mesmo nome, e que consistiria em falar à criança na sua linguagem antes de lhe impor uma outra já pronta e por demais abstrata, e sobretudo levar a criança a reinventar aquilo de que é capaz, ao invés de se limitar a ouvir e repetir. (PIAGET, 1980, p. 16 e 17)

Estes e outros posicionamentos do cientista em relação à matemática moderna e a preocupação de Piaget com o ensino da matemática expressa em diversas ocasiões e registrada em vários textos motivaram inúmeros trabalhos que buscavam (e buscam) fundamentar na teoria piagetiana, uma didática da matemática.

Além disso, o fato de Piaget concentrar esforços na psicologia *aparenta* uma aproximação de sua obra com a docência, fazendo com que possa parecer "natural" a possibilidade de tal fundamentação.

É interessante notar também que as principais obras que fundamentam em Piaget a *didática da matemática*, diferentemente do que ocorreu com os trabalhos produzidos durante o período da matemática moderna, foram escritas por não-matemáticos, na sua grande maioria pedagogos e psicólogos. Portanto, com as obras fundamentadas em Piaget para o *ensino da matemática*, abandonou-se um extremo, o da *matemática moderna*, com textos produzidos apenas por matemáticos, adotando-se outro, o de textos produzidos quase que exclusivamente por pedagogos e psicólogos. Não se considerando, portanto, a recomendação de Piaget que "muito se pode esperar da colaboração entre psicólogos e matemáticos[...]", citada anteriormente.

1.3.3 Aplicações da teoria piagetiana ao ensino da matemática: uma discussão sobre o caso particular do ensino do número

Nenhum aspecto da matemática foi tão analisado *à luz da teoria piagetiana* quanto o *ensino* do número. Incontáveis pesquisas realizadas em diferentes partes do mundo, com crianças de culturas variadas corroboraram os resultados encontrados por Piaget e seus colaboradores no que se refere à gênese do número. As implicações pedagógicas de tais resultados foram buscadas por inúmeros autores de diferentes países, resultando na publicação de diversas obras de caráter didático, destinadas ao professor ou ao aluno, a respeito da *construção do número* e, conseqüentemente, do ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A preocupação com uma metodologia específica para o trabalho pedagógico com o número só se dá, efetivamente, a partir de 1970. Antes disso, o *ensino* de números se prendia a uma repetição intensa dos algarismos, com folhas e folhas de caderno preenchidas com o algarismo 1, seqüências intermináveis de 2, 3, etc. A seqüência numérica verbal era repetida à exaustão e a contagem estimulada (e exigida) o tempo todo.

Os programas das décadas de 50 e 60 estabeleciam como meta o estudo concreto dos números de 1 a 5, depois de 5 a 10, depois de 10 a 20, seguido pela formação e a decomposição em unidades dezenas e centenas, nome e escrita. Para o primeiro ano, programava-se o estudo dos números de 1 a 100, das dezenas e dúzias. Contar de 2 em 2, de 10 em 10, de 5 em 5. Exercícios e problemas de adição, subtração (com números de um algarismo e depois de dois algarismos), multiplicação e divisão por 2 e por 5.

O professor apresentava os números aos alunos, um após o outro, primeiramente até o 5, tomando o cuidado de fazer a identificação entre o símbolo numérico e alguma coleção, por exemplo, 1 = o; 2 = oo; 3 = ooo, e assim por diante. Depois de muito treino, o caminho inverso deveria ser percorrido, o número era apresentado e a criança desenhava a quantidade representada. Tratava-se a seguir da escrita cifrada, do nome e a da escrita do nome do número, dos antecessores e sucessores e etc.

O número era transmitido como um conhecimento social, se comunicava um saber já constituído. O número se confundia com a coleção, sendo ao mesmo tempo, um signo e uma palavra. A *contagem* era enfatizada mediante a memorização da seqüência numérica. O objetivo era *ensinar* os números mediante sua apresentação objetos pré-existentes, dos quais se pode destacar determinadas características que o aluno deveria conhecer e memorizar.

Nessa perspectiva a aprendizagem era considerada efetiva quando o aluno fosse capaz de reconhecer o número em seus diferentes aspectos, conhecer seu nome, seu algarismo, seu antecessor e seu sucessor.

O sistema de numeração decimal era posto como algo imutável e perene e não como um conjunto de regras e símbolos de caráter arbitrário.

No Brasil praticamente inexistiam textos didáticos de ensino de matemática para os anos iniciais até o advento do movimento da matemática moderna. A partir daí surgiram textos didáticos, muito mais voltados a auxiliar a ação do professor quase sempre despreparado para o trato da matemática estruturada do que ao aprendiz, e livros específicos de orientação pedagógica.

A partir do movimento da *matemática moderna* o *número praticamente sai de cena*, sendo substituído pelas atividades preparatórias para a construção do conceito de número. Já não se fala mais em *ensinar* número, ele já não é mais visto como um objeto pré-existente, mas sim como algo que para ser construído necessita de pré-requisitos. Esses pré-requisitos passam a dominar os programas daquela época de tal forma que o educador francês Brissiaud afirmou que a reforma dos anos 1970, proposta “sob a bandeira da Matemática Moderna, havia conseguido desterrar o número da escola infantil francesa”. (DUHALDE; CUBERES, 1998, p.142)

Como já mencionado anteriormente, a reforma originada do movimento da matemática moderna, foi primeiramente uma reforma de conteúdos. Buscava-se uma nova concepção de número como uma propriedade vinculada a conjuntos. As atividades recomendadas eram as de classificação e seriação e o emprego sistemático da correspondência termo a termo.

Segundo publicação do *Institut National de Recherche Pédagogique* de 1991, o programa de 1970 do Curso Preparatório (CP), o equivalente francês da Educação Infantil brasileira, apresentava: atividades de classificação e de seriação; noção de número natural; nomear e escrever números; comparar dois números e soma de dois números, e destaca as orientações metodológicas que apareciam no referido programa:

É através das diversas manipulações de objetos que as crianças elaboram pouco a pouco a noção de número natural. É necessário compreender bem que o número natural não é um objeto, nem uma propriedade vinculada a objetos, mas sim uma propriedade vinculada a conjuntos.

> [...] A noção de número natural como propriedade de um conjunto aparecerá na medida em que se poderá estabelecer correspondência termo a termo entre conjuntos...
>
> [...] O emprego sistemático da correspondência termo a termo permite classificar os conjuntos e atribuir a cada classe um número: assim, a classe de todos os conjuntos que têm objetos em quantidade igual aos dedos da mão define o numeral ‘cinco’.
>
> [...] Insistir-se-á sobre o sentido das expressões: igual a , mais que, menos que.
>
> Vários elementos destes comentários se referem à escola maternal
>
> Tais atividades de classificação (aliás, precisa-se que elas devem incluir objetos variados na forma, na cor, na matéria, nos tamanhos), praticadas desde a escola maternal deverão ser retomadas nas primeiras semanas do CP (as propriedades sendo ou não de ordem sensorial)
>
> [...] Convém frisar a importância, para a elaboração da noção de número natural, das atividades de classificação, de seriação, de correlação termo a termo realizadas na escola maternal. (ERMEL, 1991, p.4)

Fica difícil não concordar com Brissiaud frente a um programa com este que enfatiza atividades que, para os formuladores, *antecedem* a noção de número. A contagem não era considerada um fator importante para a construção do conceito de número e fica muito claro que, para os formuladores do referido programa, a classificação e a seriação *antecedem* hierarquicamente o número no desenvolvimento infantil.

Algumas afirmações de Piaget acerca do insucesso escolar das crianças em relação à matemática podem ter contribuído para a interpretação de que as estruturas lógicas são anteriores à numérica.

> [...], admitiríamos sem dúvida algumas aptidões diferenciais que opõem os espíritos estritamente dedutivos (a partir de determinada idade) aos espíritos concretos; todavia, mesmo no campo da Matemática, muitos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico).
>
> A visão otimista, bastante otimista mesmo, que nos forneceram nossas pesquisas sobre o *desenvolvimento das noções qualitativas de base* que constituem ou deveriam constituir *a infraestrutura de todo ensino científico elementar* [...] (PIAGET, 1980, p.14)

Tais posições certamente influenciaram as propostas curriculares e pelo fato de serem consideradas isoladamente, sem a análise de todos os estudos piagetianos acerca da matemática em geral e do número em particular talvez tenham, de fato, contribuído para, como diz Brissiaud, afastar o número dos currículos estabelecidos pela *matemática moderna*.

É preciso reconhecer que no plano das concepções de aprendizagem não há grandes mudanças em relação ao período anterior à reforma: continua-se a primeiramente aprender conhecimentos (neste ponto, estruturas, relações ou conceitos), para posteriormente aplicá-los na resolução de problemas. É a matemática moderna sendo ensinada via modelo da matemática tradicional. Deve-se destacar, entretanto, o esforço do matemático e psicólogo francês Dienes que defendia uma aprendizagem matemática ativa.

Dienes influenciou muito esse período ao descrever as condições do processo de abstração das estruturas matemáticas que poderiam ser favorecidas pelo uso de jogos, em particular, com os blocos lógicos.

Para Piaget Dienes teve o mérito de compreender, utilizando sua experiência como matemático e pedagogo, que a “compreensão da matemática elementar decorre da construção de estruturas inicialmente qualitativas” construção esta que, quanto mais for facilitada, tanto mais estará sendo favorecido o ensino da matemática. (PIAGET, 1980, p.9)

1.3.4 E HOJE?

Atualmente as pesquisas apontam a importância tanto do processo de contagem para a construção do conceito de número como do conhecimento de número que a criança já tem antes de entrar na escola.

Muitas das aplicações pedagógicas destinadas ao ensino de matemática, porém, continuam a enfatizar o estudo das noções consideradas pré-numéricas, como a classificação e a seriação *antes* de um trabalho com atividades numéricas. E justificam que essa seqüência se depreende da obra de Piaget.

Vamos analisar mais profundamente essa situação.

Uma primeira constatação é que a metodologia para o trabalho com números, recomendada pelas propostas ditas piagetianas, apesar de apresentar sérios equívocos, tem pelo menos um resultado positivo expressivo. Praticamente não se “fala” mais em “ensino” do número como transmissão social. É raro encontrar-se atualmente propostas curriculares e livros didáticos que tratem de “ensino de números”. A maioria fala da “construção do conceito de número”, carregando, portanto, explícita ou implicitamente o fato inequivocamente demonstrado por Piaget, de que o número é construído pela criança.

A questão é, até que ponto as principais obras sobre “a construção do conceito de número na criança”, que tanto tem influenciado a elaboração de planos curriculares, de textos didáticos e paradidáticos e, conseqüentemente, a prática pedagógica do professor refletem, efetivamente, a teoria de Piaget?

Tal análise é pertinente uma vez que, de uma obra tão extensa e densa como a de Piaget, é possível se destacar algumas frases de seus contextos, ler apenas algumas obras de maneira isolada, sem a noção global dos objetivos do trabalho do autor e, a partir daí, fundamentar um trabalho caracterizando-o como piagetiano sem que este reflita, necessariamente, o pensamento do mestre genebrino.

As principais obras acerca da construção do conceito de número que têm influenciado o ensino de matemática no Brasil deixam evidentes alguns pontos destacados no livro *A gênese do número na criança*, como “a conservação de quantidades”, “a invariância dos conjuntos” e a “correspondência termo a termo” (principalmente a cardinal), passando ao largo da terceira parte do livro, que trata das “composições aditivas e multiplicativas”, sem considerar, portanto, a importância dessas composições na construção do número.

Como resultado desta “leitura parcial” o número surgiria no ápice de uma cadeia seqüencial e linear de construções.

É apenas com a compreensão das composições aditivas e multiplicativas que se pode ter clareza do movimento, das imbricações e da solidariedade de construção entre classes, séries e número, com um conceito dependendo do outro para se efetivar.

> Em vez de derivar o número da classe, ou o inverso, ou considerá-los como radicalmente independentes, pode-se efetivamente concebê-los como complementares e a se desenvolver solidariamente, embora em duas direções diferentes. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.224)

> [...] a classe, a relação assimétrica e o número são, os três, manifestações complementares da mesma construção operatória aplicada, seja às equivalências e diferenças reunidas. Com efeito, é no momento em que a criança, havendo conseguido tornar móveis as avaliações intuitivas dos primórdios, atinge assim o nível da operação reversível, ela se torna simultaneamente capaz de incluir, seriar e enumerar. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p. 253)

Como o movimento originado pela complementaridade e desenvolvimento solidário só fica evidente na terceira parte do livro, as obras que assumem, sem maiores detalhes que o número é a síntese da seriação e da classificação parecem basear-se apenas nas duas partes inicias, que tratam da conservação das quantidades e da correspondência termo a termo.

A seguir, algumas colocações:

> O número, de acordo com Piaget, é uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva). Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica. (KAMII, 1998, p.19)

> [...] Assim, (referindo-se a Piaget), assegurava que as crianças têm que construir as operações lógicas de classificação e seriação como passo prévio a construir o número e que este seria a síntese entre tais operações. (DUHALDE; CUBERES, 1998, p.37)

> Para consolidar-se, o número precisa de uma estrutura operatória de conjunto, e essa estrutura mais global é elaborada pela síntese dessas estruturas mais simples que são a inclusão de classes [...] e a seriação[...] (DORNELLES, 1998, p.39)

O número é, pois, um novo tipo de relação que se constitui pela síntese, por assimilação recíproca, destas duas relações. (RANGEL, 1992, p.102). (referindo-se às relações simétricas, que dão origem à formação da estrutura lógica de classificação e as assimétricas, que dão origem à seriação).

> O número operatório implica, pois, a síntese recíproca dessas duas estruturas lógicas: classificação e seriação. (RANGEL, 1992, p.131)

> A noção de número, por exemplo, decorre, espontaneamente, do "cruzamento" das classes com as séries [...].(BRASIL, 1977, p.25)

> Conclui-se, pois, que o número constitui uma síntese de seriação e da inclusão e exige o domínio dos seguintes princípios: constância, associatividade e reversibilidade. (GOULART, 1989, p.110)

> É necessária uma outra operação mental antes que possa ser formado o conceito de número – ou seja, a capacidade de arranjar uma série de itens de acordo com suas diferenças. (LOVELL, 1988, p.42/43)

Piaget também assim se expressa algumas vezes (1973, pág. 18, e 1980, pág. 9 e 10), e mesmo nas conclusões do livro *A gênese do número na criança*, embora em outras ocasiões ele tenha deixado claro que a síntese da classificação e da seriação origina a seqüência ou sucessão numérica (e não o número), proporcionando a generalização. Na citação a seguir, os grifos não existem no original.

> [...] o número se organiza, etapa após etapa em *solidariedade estreita* com a elaboração gradual dos sistemas de inclusões (hierarquia das *classes* lógicas) e de relações assimétricas (seriações qualitativas) com a *sucessão dos números* constituindo-se, assim, em *síntese operatória* da *classificação* e da *seriação*. (PIAGET, 1981, p.12, destaques nossos)

É evidente que numa abordagem mais simples (sem os "rigores formais") pode-se dizer que número é a síntese da classificação e da seriação e que a definição de número não vai interessar à criança. Porém, tal como expressa nas citações acima, a definição apresenta o inconveniente de sugerir uma construção linear do tipo: *primeiro vem a classificação e a seriação, depois vem o número.*

Vale destacar, que Rangel (1992), menciona o fato da construção solidária de número, classe e série, nos últimos parágrafos do capítulo destinado à construção do número:

> Piaget explicita que, apesar do número ser produto da classe e da relação assimétrica, isto não implica que as estruturas lógicas se consolidem anteriormente à formação do número. Ao contrário, o número também é necessário ao acabamento das estruturas lógicas. Assim, tanto a classe como a série se concluem ao mesmo tempo que o número, e sobre ele se apóiam tanto quanto o número se apóia sobre tais estruturas da lógica. (RANGEL, 1992, p.131)

Apesar dessa ressalva (bastante sucinta em relação ao que foi dedicado ao estudo das relações simétricas e assimétricas), a autora valoriza a realização de atividades pré-numéricas em sala de aula.

O inconveniente de tal definição é a sugestão de linearidade, de construção hierárquica, um *a priori* lógico, como se a classificação e seriação tivessem de estar concluídas enquanto estruturas operatórias para então, surgir o número, o que não é verdade. Para atingirem o *status de* estruturas operatórias*, os três, número, classificação e seriação,* desenvolvem-se solidariamente, num processo de interdependência, conforme será tratado com detalhes no capítulo III.

É importante deixar claro que sucessão numérica e contagem não designam a mesma coisa. A contagem significa apenas estabelecer uma correspondência biunívoca nome objeto sem necessariamente entender que o último nome falado corresponde ao total da coleção, o que pode ser feito sem que tenha compreensão efetiva de todos os aspectos do número. A sucessão numérica (enumeração), por outro lado, envolve, além dos aspectos cardinal e ordinal do número, a compreensão da composição aditiva do número, a conservação e principalmente o fato de que é possível conhecer todos os números sem que seja necessário conhecê-los individualmente.

Existem mais dois pontos que são bastante questionados nas aplicações existentes da teoria piagetiana ao ensino da matemática. Um deles, é o trabalho com "conjuntos" e o outro, diz respeito à ênfase exagerada em não se utilizar a contagem na comparação de coleções de objetos, o que contraria a primeira noção que tanto histórica quanto psicogeneticamente se tem de número, que é "o número de contar".

A ênfase nas atividades lógicas em detrimento das numéricas é uma conseqüência do "casamento" (à revelia dos "noivos") entre a matemática moderna e a epistemologia genética.

De fato, o trabalho com correspondência termo-a-termo para *descobrir* a quantidade de elementos de um conjunto não conduziria, necessariamente, à construção do número. Ao contrário, de acordo com a teoria piagetiana, a criança não é capaz de assimilar conceitos sobre o número ao abstrair que diversos conjuntos têm o *mesmo número de elementos*, pois isto seria o mesmo que abstrair a cor ou o cheiro de um objeto, conhecimentos de natureza física que são construídos por meio da *abstração empírica*. O conhecimento do número, por sua vez, necessita da *abstração reflexiva*, característica do conhecimento lógico-matemático e envolve a construção de relações entre os objetos.

O próprio mestre assim se posiciona em entrevista a pesquisadores da Associação Francesa dos Pesquisadores em Didática, no que se refere ao ensino de conjuntos.

> F.H. - A noção de conjunto ocupa um lugar fundamental na síntese bourbakista. Isso se explica pela necessidade de esclarecer com precisão quais entes nos interessam (por exemplo, não se pode definir uma relação sem antes precisar o conjunto de partida e o conjunto de chegada). Temos a impressão de que as coisas acontecem de maneira totalmente diferente no espírito da criança. Nele, a noção de conjunto apresenta-se quando queremos falar "coletivamente" de certos entes. Por exemplo, passar dos alunos considerados individualmente, para a classe ou a escola. Até onde sabemos, encontram-se nos trabalhos de sua escola muito poucas alusões à noção de conjunto enquanto tal.
>
> O senhor poderia esclarecer suas concepções?
>
> Piaget - Acredito que os senhores têm toda a razão e que a noção de conjunto própria aos matemáticos surge tarde na criança e apresenta-se sob uma forma totalmente outra:

> quando lhes falamos de conjuntos, elas pensam simplesmente em coleções, em indivíduos considerados coletivamente. Nesse caso, eu não falaria de conjuntos mas de classes. [...] Assim, a um ver, o conjunto supõe a construção do número e, sobretudo, a conservação do número. (PIAGET, 1998, p.225)

Assim como Dienes foi a grande referência para os professores de matemática nas décadas de sessenta e setenta, Constance Kamii é a escritora piagetiana que mais influenciou e ainda influencia os professores da educação infantil e do ensino fundamental brasileiro e de toda a América Latina e uma prova contundente deste fato é que seu livro *A criança e o número* em 1998 já se encontrava na 25ª edição.

O livro de Kamii possui dois méritos indiscutíveis: o primeiro é, sem dúvida, o fato de que a partir do *A criança e o número*, os professores passam a acreditar que não é possível se ensinar número. O outro é o de trazer para discussão, dentro do ensino da matemática, questões de natureza geral da educação piagetiana, como por exemplo, a que se refere ao objetivo geral da educação como sendo o de formar indivíduos autônomos.

Esse último aspecto reveste-se da maior importância aos professores de matemática, para quem, a possibilidade da matemática promover, ou apenas colaborar com, o desenvolvimento da autonomia é algo que jamais imaginaram ser possível, face às peculiaridades da disciplina, com seus conteúdos áridos, aparentemente hierarquicamente cumulativos e exatos, que parecem não proporcionar as discussões de temas sociais.

A respeito da construção do número propriamente dita, entretanto, Kamii pouco se aprofunda. A definição que apresenta dá idéia de construção linear do número e, além disso, ela recomenda, exaustivamente, que se deva proporcionar às crianças, a oportunidade de *colocar todos os objetos em relação*. Kamii não especifica, todavia, se o significado do termo *relações* para ela é o da linguagem comum, ou o piagetiano, onde só existem dois tipos de relações, as simétricas, que dão origem à classificação e a assimétrica, de onde se origina a seriação. Deve-se ressaltar, todavia, que os exemplos de relações que a autora apresenta referem-se a diferenças e semelhanças, sugerindo, portanto, as relações simétricas e assimétricas. Sendo neste sentido que a autora utiliza a palavra relações, pode-se dizer que ela espera uma construção seqüencial (KAMII, 1998, p.14-15).

Mediante um “olhar piagetiano”, a recomendação de colocar tudo em relação, parece sugerir as atividades *pré-numéricas* de classificação e seriação, consideradas desnecessárias pelo próprio Piaget, entretanto, em nenhum momento a autora o faz explicitamente.

As atividades propostas por Kamii para favorecerem a construção do número, enfatizam a correspondência termo a termo e a conservação de quantidades, sempre, é bom que seja frisado, objetivando mais para o desenvolvimento da autonomia. Desta forma, diferentemente da que é abordada no texto *A gênese do número na criança,* a autora, no que se refere à conservação, parece prender-se muito mais ao *estado final do conhecimento* do que ao *processo*.

De maneira geral, da teoria constante no livro *A gênese do número na criança*, de Piaget, o livro de Kamii, não reflete nada além da introdução da primeira parte, na qual fica apenas evidenciado que não existe número e nem mesmo quantidade, sem conservação.

Face à insistência de Kamii nas atividades de “colocar em correspondência” (a maioria, provocada), fica difícil não remontar ao empirismo, ou seja, o sujeito após haver aprendido, mediante uma sucessão de experiências, a possibilidade de tornar a encontrar sempre a mesma correspondência, realizaria, então, mentalmente tais experiências até considerar seu resultado como necessário?

Quanto ao que se refere à contagem, Kamii (1998, p.40), assim se expressa:

> [...] Da mesma forma, contar é uma alegria para a maioria das crianças escolarizadas de 4 a 6 anos, e se as crianças querem aprender a contar, não há porque lhes recusar este conhecimento. Contudo, o professor deve conhecer a diferença entre contar de memória e contar com significado numérico.

Entretanto, ao especificar os princípios para nortear o “ensino” do número, Kamii ressalva que se deve “encorajar a criança a quantificar objetos logicamente e a comparar conjuntos (em vez de encorajá-las a contar)” (KAMII, 1998, p.48).

Embora de fácil e agradável leitura, simples, proporcionando às pessoas que nunca tiveram um contato maior com o pensamento de Piaget o acesso às noções de conhecimento como processo, de autonomia como objetivo da educação e, particularmente, de como se constrói o conhecimento matemático, o livro de Kamii não apresenta, nem de longe, o complexo processo necessário para o desenvolvimento da noção de número na criança, descrito em *A gênese do número na criança.*

Não se está negando aqui que o número possa ser *considerado* como uma *síntese* da classificação e da seriação, mas, o que é importante deixar bem claro é que ***não é só*** a partir daí que ele existe.

Piaget nunca se posicionou contra a contagem. O que ele freqüentemente mostrou com suas pesquisas é que uma criança pode contar sem entender a natureza dos números que ela nomeia com competência. É só quando as crianças acreditam que a contagem possa ser um modo "confiável" para a solução de um problema específico, é que se pode ter uma razoável certeza de que ela compreende o sistema que a ajudou. Em outras palavras, o que Piaget destacou foi que criança poderia contar com propriedade sem que isso significasse que a mesma tivesse o conceito de número. Essa afirmação colocou em polvorosa o ensino tradicional de matemática, pois a principal maneira desta forma de ensino avaliar se a criança havia *aprendido* o conceito de número, era verificar sua capacidade de contar!

Não é possível se ter certeza das razões que levaram os pesquisadores a se fixarem nas partes iniciais do texto de Piaget, é possível, porém, levantar hipóteses. A primeira delas, poderia ser a *relativa* facilidade de compreensão destas partes, pois a maioria dos textos destina-se a professores da Educação Infantil ou dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Uma outra, poderia ser o fato de que as atividades sugeridas como introdutórias ao estudo do número em quase nada diferenciam, a não ser pela ausência de formalização, das atividades do tempo da matemática moderna, com as quais os professores já estavam habituados.

O que importa, porém, é que as aplicações pedagógicas destinadas ao ensino da matemática continuam, na sua maioria, embora isto não se depreenda da obra de Piaget, a enfatizar o estudo das noções consideradas *pré-numéricas* como a classificação e a seriação.

1.4 Para além de Piaget?

O livro *A gênese do número na criança* foi publicado em 1941 e, pela primeira vez, se pretendia apresentar, a partir de observações precisas, uma explicação teórica coerente da construção do número na infância. O interesse despertado pela obra desde sua publicação, jamais diminuiu, *apesar* ou *por causa*, das críticas teóricas que o livro contém e dos novos fatos experimentais nele apresentados.

Pesquisas atuais demonstraram que o estudo da relação entre o desenvolvimento dos conceitos matemáticos e a aquisição dos procedimentos numéricos é essencial, tanto para uma teoria de desenvolvimento cognitivo quanto para o ensino. As discussões sobre esse tema estão centradas, nos estudos genéticos, principalmente sobre a relação entre a contagem e a construção do número, aspecto não explorado na obra de Piaget e Szeminska.

Os trabalhos mais recentes têm acentuado a importância da contagem na construção do número e, todos, sem exceção, se referem aos resultados de Piaget e seus colaboradores, para fundamentar, complementar ou, refutar.

Como conseqüência da interpretação de uma construção linear do número como síntese da classificação e da seriação (em torno dos sete anos), passou-se a acreditar que o número só existiria a partir deste momento. Tal situação motivou os pesquisadores a investigarem a existência de formas primitivas de número em crianças muito pequenas e, em virtude da confirmação da hipótese de que desde os níveis mais elementares já está presente uma *quantificação bruta*, dirigiram seus estudos para a verificação do papel desempenhado pela contagem na construção do número.

Muitas pesquisas foram realizadas e seus resultados confirmaram a hipótese de que as crianças, desde muito pequenas, têm noção de número. Investigações realizadas por diversos pesquisadores comprovam que bebês, por volta dos 6 meses de idade "podem distinguir entre conjuntos de um, dois ou três elementos, bem como entre conjuntos de três e quatro elementos". (DUHALDE; CUBERES, p.34)

Outros estudos mostraram que crianças com um ano de idade podem ordenar conjuntos de diferente quantidade de elementos, podendo dar conta de pequenas mudanças numéricas no conjunto que está observando e ignorar outros dados "perceptivelmente interessantes como cor e forma". Seria um sentido numérico intuitivo, muito semelhante ao senso numérico do homem primitivo (DUHALDE; CUBERES, p.34).

> Em um artigo recente me surpreendeu ver definida a escola infantil como "o país sem números". Nada mais falso, pois nossos pequenos os descobriram fora da escola, sob uma forma muito particular que poderíamos chamar de natural e, em todo caso, própria da infância. Talvez o número não seja a princípio mais que uma palavra para a criança, mas a utiliza. O número não é, quem sabe, mais que uma figura, mas ela a percebe; não é talvez, mais que um pseudo-número, mas a criança prefigura ao verdadeiro. (BANDET, *apud* DUHALDE; CUBERES, 1998, p.36)

Pelo fato de fazerem parte de um meio social e de estarem em maior ou menor grau interagindo com ele (crianças surdas, por exemplo, possuem essa interação prejudicada), ao chegar à escola, as crianças possuem, inquestionavelmente, muitas noções numéricas informais, mas, mesmo assim, é consenso entre os estudiosos das mais diversas linhas, que o conceito de número se constrói lentamente.

A afirmação de Piaget "não basta de modo algum à criança pequena saber contar verbalmente 'um', 'dois', 'três', etc., para achar-se de posse do número", aliada ao fato de que ele e Szeminska não se ativeram muito na contagem em seus experimentos descritos no livro *A gênese do número na criança* levantaram muitas discussões, reforçando a motivação para diversas pesquisas acerca do papel desempenhado pela contagem na construção do número pela criança (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.15).

1.4.1 ALGUNS RESULTADOS ATUAIS ENVOLVENDO CONTAGEM

Pesquisas realizadas nos Estados Unidos afirmam, numa nítida intenção de contradizer as propostas pedagógicas piagetianas, que o uso de metodologias que subestimem as competências numéricas precoces da criança pequena pode entravar o desenvolvimento matemático futuro. De maneira geral, porém, nos resultados americanos prevalece a idéia do *inatismo*, pois defendem que a criança conta com "princípios precoces prévios" para a contagem (GELMAN, 1991).

Para a pesquisadora francesa Catherine Sophian, Piaget e Szeminska consideram que a contagem “desempenha um papel secundário no desenvolvimento das conceitualizacões numéricas” enquanto que os trabalhos recentes a consideram, tanto “como um indicador da riqueza dos conhecimentos matemáticos desde a pequena infância”, quanto “como um fator potencialmente importante do desenvolvimento das conceitualizações relativas ao número” (SOPHIAN, 1991, p.35).

Sophian pesquisou a *relação entre a cardinalidade e a contagem* em crianças não escolarizadas, com a idade variando de três a sete anos, encontrando resultados que revelam uma compreensão precoce tanto da contagem quanto de algumas operações matemáticas elementares. Baseada nesses resultados a pesquisadora francesa recomenda a inclusão de atividades que privilegiem a contagem e mesmo operações aritméticas a partir das primeiras aprendizagens, desde que integradas a uma pedagogia contextualizada.

Para a americana Leslie Steffe, Piaget *não considerou os suportes da experiência infantil*, na qual a contagem se faz presente, em decorrência de fatores sociais. Após ter trabalhado durante dez anos, tentando compreender como a teoria piagetiana dos estágios poderia ser utilizada no ensino da matemática, sentiu necessidade de formular um modelo da construção do número, compatível com o de Piaget, levando em conta, porém, a experiência infantil.

Os estudos de Steffe (1991) permitiram isolar *cinco estádios de aprendizagem na construção da seqüência dos números*: 1) esquema de contagem perceptiva; 2) esquema de contagem figurativa; 3) a seqüência inicial dos números; 4) a seqüência tacitamente encaixada dos números e, 5) a seqüência explicitamente encaixada dos números.

Para Karen Fuson, as pesquisas de Piaget e Szeminska subestimam tanto o papel da contagem na construção do número, quanto o das estratégias empíricas de emparelhamento (correspondência) para a quantificação.

Fuson (1991) estudou, com detalhes, a evolução entre contagem e cardinalidade, em crianças de idade variando entre dois e oito anos e seus resultados deixaram evidente a *importância* *dos procedimentos empíricos para a constituição da quantificação e da contagem para a construção do número.*

O psicólogo e matemático francês Remi Brissiaud, um típico representante do cognitivismo, considera que Piaget e Szeminska menosprezam a contagem ao considerar que “o fator verbal desempenha apenas um papel pequeno no progresso” da construção do número. (BRISSIAUD, 1991, p.51)

Brissiaud afirma que as crianças encontram o número pela primeira vez, antes da contagem, mediante a utilização de correspondência termo-a-termo, em conformidade com os homens pré-históricos, estabelecida entre uma coleção de objetos e uma “coleção-testemunho” de dedos. A seguir, mediante a comparação entre o que o autor considera como dois sistemas de representação e tratamento da quantidade (as coleções-testemunho de dedos e a contagem), a criança torna-se capaz de “precisar certos aspectos das noções de quantidade e de número” (BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISHER, JP, 1991, p.29).

Dos estudiosos atuais, Brissiaud é o mais enfático em estabelecer uma *oposição* entre os resultados piagetianos e a comprovação, por diversas pesquisas, tanto do papel efetivo desempenhado pela contagem na construção do número quanto da presença do número no pensamento infantil, antes do acabamento deste último, como síntese das classes e das séries.

Brissiaud divide sua obra *Como as crianças aprendem a calcular* (1989), em três partes: “*Comunicar*”, “*Calcular*” e “*Para além de Piaget*”. Nesta última parte, entre outras coisas, propõe uma teoria didática para a matemática, inspirada no método instrumental de Vygotsky, que enfatiza o papel da contagem no desenvolvimento dos conceitos numéricos, afirmando que suas sugestões “ultrapassam” Piaget.

Tal afirmação, todavia, não parece estar livre de contestação. Estariam, realmente, os recentes estudos acerca do número, além de Piaget, ou apenas os completariam?

1.4.2 Contradizendo Brissiaud

Quanto à alegação de *existência* de número antes da síntese entre a classificação e a seriação, o próprio fato, da elaboração desta síntese não se dar de forma linear, mas, sim, sincrônica e solidariamente, já indica a presença de *números primitivos* (quantificadores), virtuais ou reais, a partir dos níveis mais elementares.

Em relação à contagem, por concentrarem seus estudos no desenvolvimento intelectual das crianças (pressupondo operações), Piaget e Szeminska não desenvolveram maiores análises sobre a contagem (pressupondo interação social) das crianças, o que não é, contudo, suficiente para se concluir que os autores não a considerassem importante.

Ao contrário, buscando exatamente complementar os estudos de Piaget e Szeminska, Pierre Gréco pesquisou, no início da década de sessenta, o papel da contagem e da correspondência termo a termo no desenvolvimento do número e os resultados foram publicados no volume XIII dos *Études d'épistémologie génétique*, do Centro Internacional de Epistemologia Genética, sob a direção de Jean Piaget, intitulado *Structures Numériques Élémentaires*, em 1962.

Nesta obra, no artigo "*Quantidade e Quotidade: novas pesquisas sobre a correspondência termo a termo e a conservação dos conjuntos*", Gréco estabeleceu a precocidade da conservação do *resultado da contagem*, que ele denominou de *quotidade*, sem que houvesse a *conservação da quantidade*, o que o levou a atribuir um importante papel tanto à contagem, quanto à correspondência termo a termo na construção do número. Esta pesquisa pode ser considerada o marco inicial dos estudos posteriores acerca da contribuição da contagem na construção do número.

Brissiaud fundamenta-se em Gréco para justificar suas propostas que estariam, segundo o autor, "além de Piaget", enfatizando a contribuição da contagem no processo de construção do número, o que causa estranheza, pois os resultados de Gréco foram referendados por Piaget, conforme consta do prefácio da terceira edição francesa do livro *A gênese do número na criança*.

O que se conclui, a partir das referências escolhidas para ilustrar os atuais "caminhos do número", é que o trabalho de Piaget e Szeminska continua na base destes estudos, quer estes pretendam confirmá-los, complementá-los ou colocá-los em cheque. Isto demonstra bem, segundo os termos de Rémy Droz, citado por Bideaud (1991), "l'incroyable fécondidité heuristique" (a incrível fecundidade heurística), do trabalho de Piaget e Szemiska.

Capítulo 2
Evolução, fundamentos e futuro das idéias matemáticas

O principal objetivo deste capítulo é contextualizar teoricamente as pesquisas de Piaget e Szeminska que resultaram na publicação do livro *A gênese do número na criança*.

2.1 Dos primórdios ao século XVIII: para início de conversa é apresentada uma síntese (brevíssima) da história da matemática dos primórdios até o século XVIII. Esse recorte temporal justifica-se em função de que a matemática até as últimas décadas do século XVIII, apesar de se encontrar já totalmente dedutiva, ainda não é tão abstrata como se torna a partir do século XIX.

2.2 O século XIX: este século é considerado tão revolucionário para a matemática como o foi a matemática grega clássica, pois, ao mesmo tempo em que se torna completamente abstrata, a matemática também se volta para seu interior, desencadeando uma profunda revisão em seus fundamentos, que se estende, inclusive, pelo século XX.

2.3 O século XX: aqui são abordadas as diversas correntes do pensamento matemático originárias da *crise dos fundamentos* e que estabeleceram diferentes teorias explicativas para a questão "o que é o número?" instaurando um verdadeiro *"caos" teórico das diversas concepções de número*. Neste tópico fica evidente a insuficiência das principais concepções na resposta à questão "o que é o número?", a saber: do *empirismo* de Mach, Rignano e Helmholtz; do *logicismo* de Russell e Whitehead e do *intuicionismo* de Poincaré e Brouwer. A crise dos fundamentos da matemática mereceu um tratamento diferenciado em relação aos demais acontecimentos pois, concepções opostas da matemática motivaram o debate entre logicistas (Russell) e intuicionistas (Poincaré). Tal debate, principalmente no que se refere à noção de número, motivou Piaget a buscar um *tertium* entre o reducionismo lógico e o caráter irredutível do número dos intuicionistas. Dentro desse tópico aparece, também, um assunto que interessa sobremaneira aos piagetianos não matemáticos, a lógica, por permitir uma compreensão das diversas analogias estabelecidas pelo mestre genebrino entre sua epistemologia genética e a matemática. Um outro ponto a ser destacado é que, ao se tratar da lógica matemática, uma pequena digressão histórica e também um apanhado acerca da "interpretação" piagetiana da lógica, são efetuados.

2.4 O estruturalismo de Nicolas Bourbaki: Para completar a análise do contexto teórico onde se inserem as pesquisas de Piaget e Szeminska é apresentado neste tópico, em linhas gerais, o estruturalismo unificador de Nicolas Bourbaki.

2.5 Futuro: são delineadas neste tópico algumas perspectivas para o "futuro" da matemática e, recorrendo-se a uma síntese da epistemologia da matemática segundo Jean Piaget, são abordadas questões referentes à fecundidade; à necessidade e ao rigor e, à adaptação ao real, desta forma tão peculiar de conhecimento, que é a matemática.

2.1 DOS PRIMÓRDIOS AO SÉCULO XVIII

Do ponto de vista epistemológico a questão "o que é o número?" intriga filósofos e matemáticos desde a Antiguidade, evidenciando a existência de um forte contraste entre a clareza instrumental do número e a complexidade das teorias construídas para explicá-lo. Nenhuma das principais correntes do pensamento matemático conseguiu uma resposta satisfatória à questão, o que despertou o interesse de Piaget, para quem, somente uma investigação genética poderia conduzir a um resultado conclusivo.

Assim como a verdade técnica da aritmética está fora de toda discussão, a questão de se saber o que é o número deixa evidente a surpreendente incapacidade do pensamento para apreender qual é a natureza de certos instrumentos os quais, entretanto, acredita compreender completamente e os utiliza em quase todos os seus atos (PIAGET; INHELDER, 1975, p. 67).

> Este contraste entre a evidência instrumental do número e a confusão das teorias epistemológicas para explicá-lo deixa claro a necessidade de uma investigação genética: o desconhecimento do pensamento em relação às engrenagens essenciais de seu próprio mecanismo é, com efeito, o índice psicológico de seu caráter elementar e, em conseqüência, da necessidade de se remontar aos primórdios de sua formação para poder alcançá-las. (PIAGET; INHELDER, 1975, p.67 e 68)

Piaget, em parceria com Alina Szeminska, realizou essa investigação genética e os resultados obtidos foram relatados no livro *La gènese du nombre chez l'enfant*, publicado em 1941, definindo número, como "*a síntese da classificação e da seriação*".

No texto em questão, pela primeira vez que alguém se propunha apresentar uma explicação teórica coerente da construção do número na infância, a partir de observações precisas. O interesse despertado pela obra, desde sua publicação, jamais diminuiu, apesar ou por causa, das críticas teóricas que o livro contém e dos fatos experimentais nele apresentados.

Para compreender exatamente a extensão do problema é necessária uma rápida incursão na história e na filosofia da ciência matemática.

2.1.1 As idéias matemáticas

A matemática pode ser concebida de duas maneiras bem distintas: uma é a que é apresentada nos livros técnicos e especializados e, particularmente, nos didáticos, nos quais o seu aspecto é de um todo harmonioso, com os assuntos se sucedendo por uma cadeia bem definida de pré-requisitos e, principalmente, sem nenhuma contradição.

A outra maneira de se conceber a matemática é como um conjunto de conhecimentos construído pelas relações do homem com o meio em que vive, com o mundo, profundamente influenciado pelo contexto social, pelas idéias filosóficas dominantes em determinado momento histórico, pelo comércio, pelas guerras, por outras ciências, pelas exigências tecnológicas, etc. Esta última concepção fica evidente quando se envereda pela via da história da matemática.

Ao se buscar as origens e evolução do conhecimento matemático, ao se procurar entender como foi construído, aparecem dúvidas, hesitações, contradições, mudanças de rumo, novas diretrizes.

Pelos caminhos da história a matemática emerge como um bem cultural que recebeu e recebe influências do meio externo, desmistificando a imagem de um saber à parte da humanidade e auto-suficiente. Cai por terra a crença de que a formação de teorias e conceitos matemáticos obedece apenas a necessidades internas. O conhecimento matemático perde a característica de ser *impossível para as pessoas comuns* e ao qual, apenas os mais bem dotados intelectualmente teriam acesso.

Parafraseando Caraça (1984), uma vez que a citação original refere-se à ciência de um modo geral, a matemática encarada assim aparece como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com suas forças e fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação. Enfim, ela aparece como um grandioso capítulo da vida humana.

É preciso ficar claro que, se por um lado o conhecimento matemático apresenta a universalidade, a precisão e a impessoalidade como suas principais características, o mesmo não acontece com a história da matemática. Aparecem contradições, controvérsias, falta de precisão sobre quando e como aconteceram os fatos, originando então, interpretações particulares e pessoais dos estudiosos sobre o assunto.

Algumas escolhas foram feitas para essa digressão histórica, a primeira foi optar por não se obedecer rigorosamente à periodização da própria história, pois aí se perderia a visão total da contribuição de cada cultura. Assim, o que se pretende, é descrever de forma linear as principais conquistas matemáticas de cada povo por proximidades geográficas e, dentro do possível, num mesmo período. Uma outra opção foi evitar os materiais, que na busca da verdade enveredam por caminhos polêmicos. Essa digressão histórica é feita, pois, sem maiores discussões mediante a consulta de bibliografia canônica sobre o assunto.

Essa escolha não é limitante e muito menos parcial em função da natureza da ciência matemática na qual, ao contrário de muitas outras ciências, uma geração não desfaz o que foi construído por outra. O que muda na matemática é a forma. Cada geração reformula e amplia velhas estruturas, porém, estas não são descartadas, ao contrário, encontram-se embutidas nas novas construções. Um bom exemplo desse fato é o caso da geometria euclidiana e as não-euclidianas, evidenciando o processo de construção por *abstração reflexionante* do conhecimento matemático. É a *forma que muda com o tempo*, originando uma nova maneira de apresentar determinado conteúdo, provocando uma nova pesquisa sobre a forma que se transforma em conteúdo e assim, sucessivamente, e isto é a *evolução* em matemática.

Novos resultados muitas vezes têm origem numa nova forma de escrever resultados já construídos como os que se seguiram após a introdução do sistema de numeração decimal ou os progressos da matemática a partir do estabelecimento da álgebra simbólica.

A opção de se abordar nesta introdução dos primórdios até o estabelecimento do *sistema métrico decimal*, no século XVIII foi feita em função de que o que se tem a relatar, neste período, se refere apenas a descobertas ou formulações sem preocupações de natureza filosófica, ao contrário do período seguinte, quando a matemática se *liberta do real*.

Não é possível precisar o momento exato em que o homem começou a fazer matemática, o que existe, são diversas conjecturas a respeito. As mais recentes descobertas científicas acerca da presença do homem na Terra demonstram que esta é muito mais antiga do que se acreditou durante muito tempo. Foram descobertos registros da presença de que os primeiros hominídeos a andar sobre duas pernas, que é o critério utilizado para diferenciar o homem dos demais primatas, surgiram na África, há cerca de quatro milhões de anos. Os registros sobre a construção de suas primeiras ferramentas (só existem registros de ferramentas de pedra) estabelecem que foram criadas pelo chamado *Homo habilis*, natural da África e datam de dois milhões de anos atrás.

Pode causar estranheza à maioria das pessoas o fato de que o mundo "sempre esteve e está repleto de matemática", pois estão acostumadas com um matemático estereotipado, de óculos grossos, desligado do mundo, aparentemente distraído e cujo *habitat* natural não seria o mundo real. Porém, "desde o seu aparecimento na terra", o homem contava, media, calculava, "mesmo no período em que seu espírito não tinha consciência de si mesmo e quando sobre tais assuntos não existiam conceitos e convenções".

> Ele dividia a presa em partes iguais, com o que criou as frações; cortava com a sua clava ou media um pedaço de pele – comparando comprimentos, admitindo assim as idéias contrárias de "maior" e "menor". Para encurtar o caminho na curva de um rio ele abria um atalho retilíneo através do capim da estepe – junto ao leito dos rios – e com isso traçava a primeira corda de um arco. Fabricava vasos, que eram seus padrões de medida, efetuando assim as primeiras determinações de volume [...]. (KARLSON, 1961, p.3)

Não é possível deixar de perceber que as atividades anteriormente descritas passavam ao largo de qualquer operação matemática consciente, mas que o indivíduo estava, tal como a criança nos estágios iniciais de seu desenvolvimento, agindo sobre os objetos. Dessa forma, o homem primitivo construía seus conhecimentos sobre formas matemáticas, estabelecia relações entre objetos e, mais ainda, estabelecia relações entre grandezas. O homem primitivo conhecia e utilizava diferentes grandezas antes que a tomada de consciência delas lhe possibilitasse designá-las com nomes específicos.

Se as noções matemáticas primitivas aparecem já nos primórdios da raça humana, é possível se encontrar "vislumbres de noções matemáticas" em outras formas de vida "que podem datar de milhões de anos antes da humanidade". (BOYER, 1974, p.1)

A ciência já estabelece atualmente, de modo claro, que "as capacidades de distinguir número, tamanho e forma" que constituem os rudimentos do pensamento matemático "não são propriedades exclusivas da humanidade". E mais, se existe "validade no princípio biológico da sobrevivência do mais apto, a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos". (BOYER, 1974, p.1)

Com o aparecimento da agricultura no Oriente Médio há cerca de 10 mil anos atrás o homem deixou de ser nômade e com a sua fixação ao solo surgiram as primeiras civilizações. Sempre junto aos grandes rios, fontes de fertilidade, floresceram as civilizações: egípcia, no vale do Nilo; mesopotâmica, nas bacias dos rios Tigre e Eufrates; hindu, ligada aos rios Indo e Ganges e a chinesa, na região dos rios Huang Ho e Yang Tse.

De maneira geral todas estas civilizações enfrentaram problemas semelhantes como o desenvolvimento de métodos para armazenar os produtos colhidos; o estabelecimento de técnicas para a divisão de terras e plantio e para o controle das enchentes.

> Vemos assim numa vertente, uma aritmética de divisão de recursos, desenvolvendo principalmente frações e, em outra, uma geometria no estilo do que hoje chamamos agrimensura, tendo como motivação a alocação de terras aráveis. E, naturalmente, uma matemática associada às técnicas de construção, na verdade, uma mecânica de construções. (D'AMBRÓSIO, 1998, p.34)

Uma observação importante é que, embora cada civilização desenvolvesse sua matemática de forma independente, os conhecimentos matemáticos produzidos por elas, descontadas as peculiaridades de representação, *são semelhantes entre si* e obedecem a uma mesma *seqüência* de construção.

Esse fato corrobora a tese de Piaget, para quem a natureza do conhecimento matemático não é uma simples determinação social, mas, sim, resultante das relações que o sujeito estabelece com o meio (físico e social)., inclusive quando o *sujeito* é uma *coletividade*.

Embora a matemática fosse essencialmente utilitária, os registros destas civilizações já indicam um *distanciamento* do real, apresentando problemas de interesse apenas matemático, do tipo: "Qual é o número que ...?"

Uma outra característica da matemática das antigas civilizações é que todas elas se preocupavam essencialmente com o *como fazer*. Os primeiros a se preocuparem com o *por quê* fazer de determinada forma foram os gregos, importante civilização surgida na parte superior do Mediterrâneo, a partir de povos que emigraram do Norte.

> Eles praticavam uma matemática utilitária, semelhante àquela dos egípcios, mas, ao mesmo tempo desenvolveram um pensamento abstrato, com objetivos religiosos e rituais. Começa assim um modelo de explicações que vai dar origem às ciências, à filosofia e à matemática abstrata. É muito importante notar que duas formas de matemática, uma que poderíamos chamar utilitária e outra, matemática abstrata (ou teórica ou de explicações), conviviam e são perfeitamente distinguíveis no mundo grego. (D'AMBRÓSIO, 1998, p.35)

A *matemática grega* pode ser dividida em três períodos:

1 **Clássico ou helênico:** período compreendido entre 600 a.C e 300 a.C., no qual a matemática se desenvolveu em consonância co as escolas filosóficas e delas retirou seus fundamentos, alguns permanentes e outros, transitórios. Este período tem início com Tales de Mileto (625-547 a.C.); atinge seu apogeu com Pitágoras de Samos (560-480 a.C.) e termina com a morte de Aristóteles em 300 a.C.

2 **Helenístico:** este período, posterior às escolas filosóficas, se estendeu até os princípios da era cristã e é considerado a Idade do Ouro da matemática grega. É nesse período que ela se torna autônoma e consegue suas maiores realizações com Euclides, Arquimedes e Apolônio.

3. **Greco-romano:** período que tem seu início com a morte de Arquimedes por um soldado romano em 212 a.C.. Compreendeu os séculos iniciais da era cristã e foi considerado período de decadência pois apareceram apenas comentaristas. O final deste período coincide com o final do mundo clássico e, de acordo com a maioria dos historiadores, é o início da Alta Idade Média, ou Idade das trevas.

A *matemática da Idade Média* se desenvolveu particularmente em ambientes religiosos e, como todo pensamento deste período era direcionado à construção de uma teologia cristã, a matemática filosófica dos gregos foi destinada ao ostracismo em virtude de sua origem pagã.

> A matemática utilitária progrediu muito nessa época entre o povo e os profissionais. Os algarismos romanos serviam apenas para representação. Mas foram desenvolvidos interessantes sistemas de contagem utilizando pedras (*calculi*), ábacos e mãos. O Venerável Beda (673-735) escreveu um tratado sobre operações com as mãos. Também traduziu parte de *Os Elementos*, trabalho que não teve qualquer repercussão. Modelos geométricos para construções de igrejas que deram origem ao gótico, e para a pintura religiosa que deram origem à perspectiva, foram muitos desenvolvidos. Esses foram essencialmente precursores do que viria a ser chamado as geometrias não-euclidianas. (D'AMBRÓSIO, 1998, p.41)

Enquanto na Europa o cristianismo se expandia, os povos do sul do Mediterrâneo, do norte da África e do Oriente Médio se rebelavam contra o domínio romano. Enquanto esses povos estavam subjugados "apenas" política e economicamente era possível que conservassem suas tradições e rituais, o que desapareceu com o fortalecimento do cristianismo e o fim da tolerância religiosa.

O principal movimento de *libertação* dos povos do sul do Mediterrâneo foi a Hégira, liderada por Maomé (570-632). Desse movimento surgiu o islamismo, cuja expansão foi fulminante, conquistando todo o norte da África, o sul da península ibérica, a Índia e a China.

A maior figura da *ciência islâmica* foi, com certeza, o matemático Muhammad ibn Musa al-Kwarizmi al-Magusi (780-847) que é considerado o *responsável* pelo surgimento da álgebra. Al Kwarizmi produziu diversos trabalhos, entre eles, um livro onde introduz a redução de termos semelhantes de uma equação acompanhada da alteração do sinal, marcando, desta forma, o nascimento da álgebra. Deve-se também a esse sábio muçulmano a divulgação no Ocidente dos símbolos criados pelos hindus para representar os números, os *algarismos*, assim denominados em sua homenagem.

> Logo no início de suas conquistas os árabes precisavam impor sua língua aos povos submetidos e, por possuírem pouco interesse científico e cultural, seus primeiros trabalhos escritos foram traduções, para o seu idioma, de escritos hindus e gregos. Posteriormente, estes trabalhos foram traduzidos do árabe para o latim e se tornaram perenes.

Além da gratidão por terem sido responsáveis pela preservação de grande parte do conhecimento matemático da Antigüidade, a matemática deve também aos árabes, a difusão, em todo o Ocidente, do sistema de numeração decimal dos hindus, possibilitando grandes avanços para a ciência em geral e para a matemática em particular.

Do século XI ao século XIII, pode-se dizer que a matemática (exceção feita a Fibonacci e poucos outros), ficou restrita às *traduções* (do árabe para o latim) das principais obras gregas, hindus e chinesas.

Nos séculos XIV e XV, a produção do saber científico e cultural estava centralizada nos mosteiros e nas universidades (a primeira, a de Bologna, havia sido fundada no século XI), porém, as áreas de interesse eram: a filosofia, a lógica, a ótica, a navegação, as construções e as artes. A matemática, ficando em segundo plano, foi apenas reorganizada para servir de *ferramenta* aos principais interesses.

> Todos aqueles conhecimentos que passariam a ser denominados *matemática* começaram nessa época a ser organizados com um estilo próprio e a ser conhecidos por especialistas. Reconhece-se aí, o início do nascimento de especialidades no conhecimento. (D'AMBRÓSIO, 1998, p.46)

A partir dos descobrimentos, o mundo ocidental, particularmente, Portugal e Espanha, alcançaram desenvolvimento científico notável focalizado na navegação, enquanto que nos demais países da Europa, o impacto do descobrimento de outras realidades a partir da existência de um “Novo Mundo”, impulsionou a necessidade da busca de novos sistemas de explicação e, conseqüentemente, novos enfoques filosóficos que, em conjunto com o acesso às fontes originais gregas, deu origem ao Renascimento.

Os séculos XVII e XVIII contemplaram o surgimento da geometria analítica de René Descartes e do Cálculo Diferencial e Integral que foi construído simultânea e independentemente por Isaac Newton, na Inglaterra e Gottfried Wilhelm Leibniz, na Alemanha, reafirmando a natureza do conhecimento matemático, descrita por Piaget.

> Na Europa continental as idéias de Newton eram muito convenientes para o pensamento político que se construía como base filosófica para a Revolução Francesa. Imediatamente os intelectuais revolucionários adotaram a nova matemática proposta por Newton e deram ao cálculo diferencial um impulso notável. (D’AMBRÓSIO, 1998, p.50)

A *França revolucionária* tem no século XVIII, o seu século de ouro. Além das descobertas que impulsionaram o desenvolvimento da matemática pura, os considerados “seis homens de ouro” da matemática francesa, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legengre, Gaspard Monge, August Condorcet e Lazare Carnot, estabeleceram, em 1799, o *Sistema Métrico de Pesos e Medidas*. Esse sistema é adotado, atualmente, por todos os países civilizados do mundo.

Apesar da importância social do Sistema Métrico Decimal, este não foi a única e nem a maior contribuição da matemática do século XVIII. Aconteceram no século em questão, desenvolvidos adicionais em áreas como geometria analítica teoria dos números, o cálculo, a probabilidade, além da criação de novos ramos como cálculo de variação, equações diferenciais parciais, geometria descritiva, topologia e geometria diferencial.

A maior figura da *matemática do século XVIII* e uma das maiores de todos os tempos foi, com certeza, a do suíço Leonhard Euler, considerado o matemático que mais produziu e publicou em todos os tempos. Estima-se que sua obra ultrapasse 800 trabalhos versando sobre Cálculo, Teoria dos Números, Álgebra, Mecânica, Óptica, Teoria das Probabilidades e sobre o nascente campo da matemática, a Topologia, além de escritos sobre o cálculo das variações, música e números complexos.

A matemática do século XVIII poderia ser caracterizada por uma única palavra: *algorítmica*, embora no final do século ela tenha perdido esse caráter puramente algorítmico, com a geometria adquirindo contorno de geometria pura e a física se convertendo em física matemática. (BABINI, 1969)

Nesse século, tanto a análise algébrica quanto a infinitesimal adquirem vida própria, se libertando, de certa forma da geometria e da ciência natural. A matemática assumiu um caráter formal, embora ainda não rigoroso.

O século XVIII contemplou também o desaparecimento dos *matemáticos polivalentes* e o conseqüente surgimento dos *especialistas*, como o *geômetra* Monge. "Um outro acontecimento digno de registro no século XVIII foi a entrada das mulheres no campo da matemática e no das ciências exatas, de uma maneira mais geral". (EVES, 1995, p.493)

Assim, até o século XVIII, embora já inteiramente dedutiva, a matemática estava profundamente ligada aos algoritmos e pouca ou nenhuma preocupação existia quanto à natureza de seus elementos e aos seus fundamentos. De uma maneira geral, à exceção da idade heróica na Grécia Antiga, a evolução das idéias matemáticas, prosseguiu, até o século XVIII de uma maneira praticamente linear, sem maiores revoluções. Vista de hoje, parece que a matemática se desenvolveu de uma maneira praticamente *esperada*.

Tal não é, todavia, o panorama do século XIX, considerado "mais revolucionário na história da matemática", com a descoberta de um "novo mundo na geometria". (BOYER, 1974, p.387)

O conhecimento matemático deixou de ser produzido apenas na França, Inglaterra, Itália e Alemanha, e países, até então, cientificamente insignificantes invadiram o cenário matemático. A matemática passou a ser reconhecida não mais como uma ciência natural, ou seja, decorrente da observação da natureza, ou que buscasse descrevê-la, mas, como uma criação intelectual do homem. "O século dezenove, que se orgulha da invenção do vapor e da evolução, poderia derivar um título mais legítimo à fama da descoberta da matemática pura”. (RUSSELL, 1901, *apud* BOYER, 1974, p.440)

2.2 O SÉCULO XIX

Embora não tenha sido matemático e nem tenha vivido a maior parte da sua vida no século XIX, Immanuel Kant influenciou profundamente o desenvolvimento científico e cultural dos séculos XIX e XX, particularmente, a matemática. Para o filósofo alemão a matemática apresentava-se como uma ciência segura que deveria servir às demais ciências, inclusive à metafísica, como um modelo a partir do qual seria possível construir um conhecimento legítimo que pudesse prescindir da experiência.

> Eis aqui um conhecimento grande e comprovado, que é já hoje admirável e promete para o futuro um desenvolvimento ilimitado; comporta uma certeza apodícta perfeita, isto é, uma absoluta necessidade, não se apóia, pois, em nenhum fundamento empírico; por conseguinte, é um puro produto da razão [...]. (KANT, 1988, p.47)

> Observando como a matemática e a física se tornaram, em conseqüência de uma revolução repentina, o que hoje são, julguei o exemplo suficientemente notável para induzir-me a refletir sobre o elemento essencial de uma mudança de método que se revelou tão vantajoso para aquelas ciências, e a imitá-las aqui, pelo menos a título de experiência, tanto quanto a sua analogia – enquanto conhecimentos racionais – com a metafísica o permitir. (KANT, 1787, apud PASCAL, 1996, p.34)

Até Kant, tanto os filósofos racionalistas quanto os empiristas, dividiam as proposições em duas classes que se excluem mutuamente e que esgotam o universo das proposições: as *analíticas*, que englobam as verdades da razão e as *empíricas*, que expressam os fatos. Uns e outros concordavam, todavia, que as proposições da matemática são analíticas, reduzindo suas discordâncias para a interpretação que dão das proposições empíricas.

Kant recoloca a questão da classificação das proposições propondo outra: as proposições podem ser analíticas, isto é, aquelas cuja negação conduz a não-contradições e as sintéticas, ou não analíticas. A principal diferença entre Kant e seus antecessores é a distinção de duas classes de proposições sintéticas: as empíricas ou sintéticas *a posteriori* e as que não são empíricas, as sintéticas *a priori*.

É o estabelecimento dos juízos sintéticos *a priori* que confere todo o alcance da "revolução copernicana" do sistema kantiano. Com tais juízos o conhecimento não depende apenas da razão ou do sujeito, como queriam os racionalistas e nem apenas do objeto, como defendiam os empiristas, mas de ambos.

As proposições matemáticas seriam sintéticas *a priori*, pois seriam as formas puras da intuição, o espaço e o tempo, que permitiriam fundamentar e legitimar os juízos sintéticos *a priori* e expressariam a especificidade da matemática. Para Kant o indivíduo conheceria o espaço e o tempo de um modo absolutamente *apriorístico*.

> [...] Assim, os juízos que se referem às formas de sensibilidade são *a priori*, ainda que sejam sintéticos e portanto são possíveis na matemática que se fundamenta numa construção de conceitos. A validade da matemática, está fundada na intuição *a priori* das relações das figuras espaciais e dos números, que por sua vez se fundamentam na sucessão temporal das unidades. O espaço e o tempo são, portanto, o fundamento lógico – não psicológico – da matemática e nela são possíveis os juízos sintéticos *a priori.* (MARÍAS, 1958, p.277)

Assim, os juízos matemáticos seriam sintéticos *a priori* embora pudessem dar a ilusão de serem analíticos. O caráter *a priori* do conhecimento matemático e o fato de seus juízos ou proposições serem sintéticos estabeleceram a posição singular da matemática no sistema kantiano: a de ser uma ciência que trata essencialmente de juízos sintéticos *a priori* e ser, ela mesma, a maior produtora destes juízos.

> Ora, o espaço e o tempo são aquelas intuições em que a matemática funda todos os seus conhecimentos e juízos, que se apresentam ao mesmo tempo como apodícticos e necessários; com efeito, a matemática deve representar todos os seus conceitos em primeiro lugar na intuição, e a matemática pura na intuição pura, isto é, construí-los, sem o que (porque ela não pode proceder analiticamente, isto é, por desmembramentos dos conceitos, mas apenas sinteticamente) lhe é impossível dar um passo, enquanto lhe faltar a intuição pura, na qual pode ser dada a matéria para juízos sintéticos a priori. A geometria toma por

> fundamento a intuição pura do espaço. A aritmética forma ela própria os seus conceitos de número pela adição sucessiva das unidades no tempo, especialmente, a mecânica pura só pode formar os seus conceitos de movimento mediante a representação do tempo. (KANT, 1988, p.51)

Em outras palavras, a matemática se referiria à realidade concreta mas utilizaria para apreendê-la conhecimentos *a priori* de tempo e de espaço; o primeiro, fundamentando o número e, conseqüentemente, toda a aritmética, enquanto que o segundo, alicerçando a geometria.

A enorme influência do pensamento kantiano nos matemáticos do século XIX pode ter sido a principal razão para o "escândalo" que se seguiu à descoberta das geometrias não-analíticas. A filosofia de Kant está presente, também, na base do intuicionismo de Poincaré.

A história da matemática não obedece, necessariamente, às divisões periódicas da história ou o decorrer linear do tempo. Ao contrário, construída por homens, está intimamente ligada à época em que viveram os matemáticos. Assim, não é possível enquadrar homens e suas produções matemáticas em séculos e períodos intermediários sempre devem ser considerados.

Na linha divisória da matemática dos séculos XVIII e XIX, brilham alguns matemáticos, nascidos no século XVIII, mas que alcançaram notoriedade no século XIX, como por exemplo, Gauss e Cauchy.

Os primeiros anos do século XIX já apresentavam indícios de que a hegemonia da matemática francesa pós 1789 se encontrava seriamente ameaçada por um jovem alemão, mas tão alemão que nunca saiu da Alemanha, nem mesmo para uma pequena viagem.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) era filho de um simples trabalhador de Brunswick que tentou, por todos os meios, evitar que seu filho recebesse instrução escolar. A mãe de Gauss, ao contrário, apesar de jamais ter tido acesso aos conhecimentos escolares, sempre lutou para que o pequeno Carl tivesse destino diferente. Como viveu durante 97 anos ela teve tempo e motivos suficientes para se orgulhar de sua atitude, pois acompanhou, praticamente, toda a carreira do filho.

Considerado por muitos como o maior matemático de todos os tempos, Gauss foi o que seria hoje designado por “criança prodígio”. Seu talento foi reconhecido pelo Duque de Brunswick que se encarregou da educação do pequeno gênio e assim, em 1799, Gauss já obtinha o grau de doutor em Helmstedt. A partir de 1807 e até a sua morte, Gauss trabalhou tranqüilamente como diretor do observatório astronômico e professor da Universidade de Göttingen, onde havia realizado todos os seus estudos, à exceção do doutorado.

Da mesma forma que seus contemporâneos e, curiosamente, conterrâneos, Kant, Göethe, Beethoven e Hegel, Gauss se manteve distante das lutas políticas, porém, se o seu isolamento relativo; a sua compreensão das matemáticas *puras* e *aplicadas*; a sua preocupação com a astronomia e o uso freqüente que fazia do latim possuem a marca do século XIX, o conteúdo de seu trabalho retrata, “de forma poderosíssima” as novas idéias de sua época (STRUICK, 1992, p.227).

Gauss não publicava sistematicamente seus trabalhos, preferindo registrá-los, de forma sucinta, em um diário, que só foi encontrado em 1898, após a sua morte, portanto. Dos 146 breves registros contidos no diário (o último datado de 9/7/1814) 144 já foram decifrados em sua maior parte. O termo *decifrado* é pertinente uma vez que Gauss escrevia de forma *críptica*, como atesta o exemplo: “EYPHKA! *num* = $\nabla+\nabla+\nabla$, o que traduz a descoberta, por parte de Gauss, de uma demonstração de que todo inteiro positivo é soma de três números triangulares” (EVES, 1995, p. 520).

Os estudos de Gauss abrangeram vários campos científicos, como astronomia, física matemática e matemática. Desta última, tinha especial predileção pela teoria dos números, chegando a afirmar que “a matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas”. Na sua tese de doutorado, Gauss estabeleceu a primeira demonstração do teorema que estabelece que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos uma raiz, teorema este que recebeu, de Gauss, a denominação de “teorema fundamental da álgebra”, carregando, portanto, no próprio nome, a dimensão de sua importância para a matemática (BOYER, 1974, p.367).

O matemático alemão deixou, também, colaborações inestimáveis ao cálculo diferencial e integral, à teoria das probabilidades; à estatística (criou a teoria dos erros, de onde surgiu a curva de Gauss); à teoria das funções de variáveis complexas; à astronomia; à geometria diferencial e à física, em especial no campo do eletromagnetismo, tendo, inclusive, construído em conjunto com o físico Wilhelm Weber, um telégrafo elétrico, bem antes de Samuel Morse.

Gauss foi também um dos *descobridores* da geometria não-euclidiana - foi dele esta denominação - como tentativa de demonstração do postulado V de Euclides, que estabelece que *por um ponto de um plano não pertencente a uma reta dada, passa uma única paralela a esta reta*, fato que o intrigava desde os 13 anos de idade.

No século XVIII haviam sido realizados muitos estudos com o objetivo de mostrar que o “axioma das paralelas” seria *supérfluo* e que seria possível construir a geometria utilizando apenas os quatro primeiros postulados euclidianos. Os estranhos resultados obtidos, porém, como por exemplo, o de que a soma dos ângulos internos de um triângulo não seria necessariamente igual a dois retos *assustavam* os estudiosos que não consideravam como geometria o sistema assim obtido.

> Gauss foi, na verdade, o primeiro que visualizou o fato. Preocupado com a questão das paralelas desde a sua adolescência, não publicou nada a princípio, por temer, como ele próprio diz, a “gritaria dos boécios”, porém, em 1831 decide fazê-lo, todavia, no ano seguinte, inteirado do trabalho de Bolyai, abandona esse propósito. (BABINI, 1969, p.117)

A mentalidade matemática de Gauss superava não apenas a limitação imposta pelo mundo exterior, que foi a responsável pela não admissão, por Kant, entre outros, da possibilidade de uma geometria não-euclidiana como, também, a maneira de raciocinar imposta pelos *Elementos*. Assim, o matemático alemão acreditava que era possível construir, de forma rigorosamente dedutiva, um novo edifício geométrico, ainda que, segundo ele, “à primeira vista, muitos de seus resultados apresentem um aspecto paradoxal” (BABINI, 1969, p.119).

2.2.1 AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Os textos dos *Elementos* de Euclides possuem uma estrutura axiomática, isto é, começam com a apresentação de definições fundamentais, seguidas de uma série de axiomas (ou postulados) e a partir disso, são demonstrados teoremas da geometria, da aritmética e da teoria das proporções. Como os axiomas são proposições aparentemente iguais aos teoremas que são demonstrados a partir deles, filósofos, lógicos e matemáticos vêm, há quase dois mil anos tentando estabelecer com clareza qual seria a particularidade que os caracterizaria e mais, discute-se também, qual seria o significado de uma construção axiomática.

Essa discussão, que aconteceu através dos tempos, desembocou em duas vertentes: os axiomas são proposições ainda não demonstradas, assumidas precariamente como verdadeiras até que algum dia suas validades sejam confirmadas ou, os axiomas são autênticos, isto é, jamais poderão ser demonstrados e talvez sejam evidentes em si mesmos (BARKER, 1969).

Cada uma das vertentes possuía seus partidários. Leibniz (1696-1716), por exemplo, acreditava firmemente que todas as proposições poderiam ser deduzidas a partir de definições mediante o princípio da não-contradição e assim, investiu anos de sua vida, na vã tentativa de demonstrar os postulados fundamentais da geometria.

A discussão acerca do caráter axiomático da geometria euclidiana se ateve, particularmente, em relação ao postulado V, o “postulado das paralelas” que tanto intrigou Gauss, não apenas por sua forma original[3] mas, principalmente, pelo fato de que ele só é utilizado pela primeira vez na demonstração 29 do Livro I dos *Elementos*, com todas as 28 proposições anteriores sendo demonstradas sem a sua ajuda.

Embora as inúmeras tentativas, que remontam a Euclides, de demonstração do postulado V tenham sido infrutíferas, elas proporcionaram a criação de vários enunciados para este postulado, como o das paralelas[4] por exemplo, capazes de substituí-lo,

[3] “Se uma reta cortar outras duas retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, então as duas retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos”.

[4] “Dado uma reta e um ponto fora dela, por este ponto passa uma única reta paralela à reta dada”.

mantendo, todavia, as mesmas características da geometria euclidiana.

A substituição do postulado V por postulados análogos, mas não equivalentes, mesmo mantendo os quatro primeiros axiomas, resultaram em geometrias de características muito diferentes, denominadas por Gauss de *geometrias não-euclidianas.* O estabelecimento dessas geometrias revelou matemáticos de nacionalidades que até então não haviam participado direta ou decisivamente da *redação* da história da matemática: Johann Bolyai, da Hungria e Nicolai Ivanovitch Lobachevsky, da Rússia.

Johann Bolyai (1802-1860) foi um oficial do exército húngaro e sua intimidade com a matemática teve início na mais tenra idade, pois seu pai Wolfgang Bolyai era professor de matemática. Como era amigo de Gauss, Wolfgang Bolyai conhecia os estudos de Gauss e incentivou consideravelmente o filho a estudar o postulado das paralelas.

Aos 21 anos Johann Bolyai já tinha a exata dimensão da natureza do problema que lhe havia sido proposto e manifestou seu entusiasmo pela tarefa em uma carta a seu pai em 1823, onde deixava explícito seu interesse em publicar os resultados obtidos afirmando: “Do nada eu criei um universo novo e estranho”. O jovem matemático húngaro publicou em 1832 a sua *Ciência Absoluta do Espaço* como apêndice de um trabalho didático sobre matemática elementar, de autoria de seu pai (EVES, 1995, p.542).

Como as considerações tecidas por Bolyai se referem às propriedades geométricas que independem do postulado V, isto é, “verdades ou teoremas que são válidos tanto para a geometria ordinária como para a geometria mais geral por ele construída”, ele designava por *absolutas* as proposições que eram válidas tanto na geometria euclidiana, quanto na “nova” geometria (BABINI, 1969, p.118).

Embora tivesse deixado inúmeros manuscritos Bolyai jamais publicou outros trabalhos não sendo esta, porém, a principal razão para que ele raramente receba os créditos devidos ao estabelecimento de uma “nova” geometria. A razão deste “esquecimento” é que, posteriormente à publicação do húngaro ficou-se sabendo que o matemático russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky havia publicado, entre 1829 e 1830, descobertas muito semelhantes e mesmo mais completas, “mas, devido às barreiras da língua e à lentidão com que as informações das novas descobertas se propagavam naqueles dias, seu trabalho permaneceu ignorado na Europa por vários anos” (EVES, 1995, p.542).

De novo a situação se repete: matemáticos separados geográfica e culturalmente, sem nenhum contato entre si, identificam o mesmo problema e o “resolvem” de maneira semelhante, estabelecendo a mesma teoria, como se esta teoria não houvesse sido criada e sim descoberta, praticamente referendando a visão platônica da matemática ou mesmo, até, o caráter “sintético *a priori”* kantiano dos juízos matemáticos.

Para Piaget o *caráter de necessidade* existente na construção do conhecimento matemático se constitui num dos principais problemas epistemológicos desta ciência., conforme veremos ao final deste capítulo.

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) era professor na Universidade de Kazan, na Rússia, onde ministrou um curso sobre o axioma das paralelas de Euclides. Seu primeiro artigo sobre geometria não-euclidiana foi publicado no *Kazan Bulletin* em 1829. Esse trabalho não teve repercussão na Rússia e por ter sido escrito em russo, quase nenhum estudioso de outro país teve acesso ao mesmo.

A exposição de Lobachevsky, embora semelhante, foi mais bem construída que a de Bolyai e, apesar do pouco reconhecimento alcançado, deu continuidade aos seus estudos publicando, em 1836, novamente em russo, o livro *Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas*. Em 1840, buscando atingir um número maior de leitores, publicou um resumo deste trabalho em alemão. Em 1855, um ano antes de sua morte, já cego, ditou a exposição mais completa de sua teoria, a *Pangeometria*, que foi publicada em russo e em francês.

Dos trabalhos de Gauss, Bolyai e Lobachevsky originou a geometria hoje conhecida por *hiperbólica*, geometria de Gauss-Lobachevsky, geometria de Lobachevsky ou, embora raramente, geometria de Bolyai-Lobachevsky. Sua principal característica é que, por um ponto exterior a uma reta em um plano existem duas retas paralelas à primeira e, então, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que dois retos.

O estabelecimento de novas geometrias teve uma divulgação muito lenta entre os estudiosos, não apenas em função das nacionalidades de seus descobridores, mas, principalmente, pela onda de indignação que desencadeou entre matemáticos e filósofos, particularmente os seguidores de Kant que representavam o pensamento dominante naquela época.

Apesar das dificuldades, alguns matemáticos em países diferentes e isoladamente aprofundaram os estudos sobre as novas idéias e, a partir de 1870, já eram legítimas as investigações das geometrias não-euclidianas segundo duas direções pré-determinadas: "a chamada *métrico-diferencial* e a *projetiva*" (BABINI, 1969, p.119).

O caminho *métrico-diferencial* foi estabelecido por um dos grandes matemáticos do século XIX, o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), discípulo de Gauss. Riemann provou em 1854 que era possível o desenvolvimento de uma nova geometria não-euclidiana além da hiperbólica, a hoje denominada geometria *elíptica*.

A principal característica da geometria *elíptica* é que por um ponto exterior a uma reta dada, não passa nenhuma paralela à mesma. Como conseqüência, nessa geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre inferior a dois retos.

> Menor, igual e maior: três afirmações contraditórias. Estas estabeleceram os três grandes campos da doutrina geométrica: elíptica, parabólica e hiperbólica, sendo a parabólica a de Euclides. Aqui havia a composição de uma batalha de primeira classe, não entre campos científicos opostos sustentando hipóteses relativamente vagas e em conflito, mas, sim, no mesmo nível do argumento lógico, o reino que todos consideravam como seguro. A batalha teve lugar e chegou a seu final. Como uma contenda triangular, todos os lados perderam num certo sentido, o de que qualquer partidário de um dos pontos de vista, declarando que o "seu" era o verdadeiro, colocaria a si próprio numa tarefa quimérica. Ao invés de conservar um poder soberano, cada um destes três campos se encontrava a serviço de um conjunto muito mais fundamental. (TURNBALL, 1968, p.195-196)

As denominações: *hiperbólica* para a geometria de Bolyai-Lobachevsky; *elíptica* para a geometria de Riemann e *parabólica* para a de Euclides foram dadas pelo matemático alemão Félix Klein (1849-1925).

> As idéias fundamentais de Riemann, que permitiram encarar o problema das novas geometrias sob um ponto de vista superior, aparecem em sua célebre dissertação de 1854, publicada em 1867: 'Sobre as hipóteses fundamentais da geometria', onde analisa da maneira mais geral possível o comportamento infinitesimal de uma multiplicidade de um número qualquer de dimensões. Nesta dissertação aparece a importante distinção entre 'infinito' e 'ilimitado', que desempenharia papel singular na teoria física da relatividade. (BABINI, 1969, p.119)

Diversos outros campos da matemática receberam as contribuições valiosas de Riemann, em particular a teoria da integração e as funções de variáveis complexas e apenas "poucos matemáticos deixaram a seus sucessores um legado de idéias tão rico para desenvolvimento posterior". (EVES, 1995, p.613)

A descoberta de geometrias não-euclidianas que fossem internamente consistentes abalou os alicerces do mundo científico de então, de uma forma bastante similar ao impasse provocado pelo surgimento dos números irracionais entre os pitagóricos.

É possível imaginar o impacto gerado por semelhante situação: a matemática deixava de ser a ciência das verdades absolutas para ser relativa ao campo considerado!

Os estudiosos se viram frente a frente com a possibilidade de criação de diversos sistemas geométricos e a antiga concepção da geometria euclidiana como única e fundada em postulados *auto-evidentes* desmoronou.

> Com a possibilidade de inventar geometrias puramente 'artificiais', tornou-se evidente que o espaço físico devia ser visto como um conceito empírico derivado de nossas experiências exteriores e que os postulados da geometria, formulados para descrever o espaço físico, são simplesmente expressões dessas experiências, como as leis de uma ciência física. O postulado de Euclides, por exemplo, na medida em que tenta interpretar o espaço real, revela ter o mesmo tipo de validade da lei de queda livre dos corpos de Galileu; isto é, ambos são leis que decorrem da observação e ambos são suscetíveis de verificação dentro dos limites do erro experimental. (EVES, 1995, p.544)

A geometria encarada como uma ciência experimental quando aplicada ao espaço chocava-se frontalmente com a idéia de espaço como *categoria do pensamento* que dominava o pensamento filosófico de então e era este o principal ponto que incomodava os kantianos da época. Ao se conceber o espaço como categoria do pensamento os postulados da geometria euclidiana seriam juízos *a priori* impostos ao espírito humano e, sem esses postulados não era possível nenhum raciocínio sobre o espaço (EVES, 1995, p. 543).

As descobertas de Bolyai-Lobachevsky e de Riemann retiraram toda a sustentação desse ponto de vista ocasionando uma onda de indignação entre muitos dos kantianos do século dezenove. Mais tarde, porém, os filósofos *neo-kantianos* Nelson, Meinecke e Natorp mostraram que a admissão de geometrias não-euclidianas partindo dos pressupostos de Kant não apenas era possível como, também, necessária.

Kant expressou o caráter axiomático da geometria ao afirmar que os juízos geométricos são sintéticos. Definiu a natureza analítica e, correlativamente, a sintética de um juízo de duas maneiras: um juízo é analítico se o conceito predicado está incluído no sujeito ou se pode ser demonstrado utilizando somente o princípio da não-contradição. Freqüentemente, se argumenta que é difícil encontrar juízos analíticos, o que é verdade, pois a maioria deles, segundo Kant, são tautologias como "o todo é maior que sua parte" (MARTIN, 1971).

Na concepção axiomática da geometria o predicado não está incluído no sujeito. Por exemplo, na proposição "a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos" o predicado está unido ao sujeito, porém, os outros dois predicados logicamente possíveis: "menor que dois retos" e "maior que dois retos" podem, também, se unir ao sujeito "soma dos ângulos de um triângulo", caracterizando, respectivamente, as geometrias de Euclides, de Lobachevsky e de Riemann.

Ao demonstrar que predicados contraditórios podem referir-se ao mesmo sujeito a axiomática confirma, portanto, a tese kantiana sobre o caráter sintético dos juízos geométricos.

A partir da constatação de que a geometria era uma criação arbitrária do espírito humano, ficou também admitida a possibilidade da espontaneidade do pensamento geométrico e o ponto de vista reinante da existência de uma “verdade absoluta” sofreu um rude golpe. É nesse momento que a matemática começa a se *libertar do real* (EVES, 1995).

Essa liberdade está restrita, todavia, a contingências não explícitas, que fazem com que, mesmo exercendo o seu livre arbítrio, os matemáticos caminhem por caminhos semelhantes em função do caráter necessário do conhecimento matemático. Assim, mesmo liberta do real no momento de sua criação, a matemática, cedo ou tarde, se adapta plenamente à realidade ou mesmo a antecipa. (PIAGET, 1975)

Um outro movimento acontecido no século XIX foi de fundamental importância para a libertação da matemática do real: a *aritmetização da análise*.

2.2.2 A ARITMETIZAÇÃO DA ANÁLISE

Durante o século XVIII, com Euler e Lagrange, a análise infinitesimal atingiu enorme progresso. Esse progresso, porém, não se encontrava fundamentado em nenhum sistema conceitual rigoroso, ao contrário, era puramente formal e algorítmico. Dessa forma, “quando se referia aos seus fundamentos, se falava do *cálculo infinitesimal”* e, no que se referia à teoria das séries, “o uso de séries divergentes estava rodeado de mistério e obscuridades” (BABINI, 1969, p.120).

> Será tarefa do século XIX analisar esses fundamentos e esses princípios, introduzindo na matemática um rigor ainda superior ao que desfrutou essa ciência no período clássico de Euclides e de Arquimedes, rigor este, que desde então constitui uma de suas notas características. (BABINI, 1969, p.115)

No decorrer do século XIX, num processo iniciado pelo tcheco Bernard Bolzano (1781-1848) e construído por Cauchy, Abel e Jacobi, entre outros, a análise infinitesimal fixou sólidas bases na aritmética, eliminando toda alusão à metafísica. Esse processo ficou conhecido como a *aritmetização da análise.*

O francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pode ser considerado o mais importante analista das primeiras décadas do século XIX. Estudou na Escola Politécnica de Paris onde foi aluno de Lagrange e Laplace que, convencidos de seu talento matemático, o persuadiram a aceitar um cargo de professor nessa escola em 1807, fazendo-o abandonar a pretensão inicial de se tornar engenheiro civil.

Cauchy escreveu extensiva e profundamente tanto sobre matemática pura como sobre matemática aplicada. A produção excessiva e a redação apressada tornaram irregular a qualidade de seus escritos, porém, dentre as numerosas contribuições de Cauchy à matemática avançada, destacam-se a pesquisa em convergência e divergência de séries infinitas, teorias das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidades e físico-matemática (EVES, 1995, p.531).

A abordagem atual do cálculo em textos universitários é, em grande parte, devida a Cauchy, particularmente, os conceitos básicos de limite e continuidade.

Com Cauchy há um retorno ao rigor clássico da geometria, buscando-se a precisão nas definições; a delimitação do domínio de validade das fórmulas, a eliminação de toda extensão ilegítima de forma a livrar a análise libertando-a da "manipulação formal cega e das demonstrações intuitivas". (EVES, 1995, p.121)

Cauchy completou a obra iniciada por Niels Henrik Abel ao fundar a análise sobre bases mais rigorosas, fixando "claramente a convergência das séries" e eliminando as séries divergentes da análise (BABINI, 1969, p.121).

Matemático importante para a aritmetização da análise, Niels Henrik Abel (1802-1828) nasceu na Noruega e quando ainda era estudante em Oslo, acreditou ter encontrado a solução algébrica geral da equação quíntica. Percebeu logo o seu equívoco e, num artigo em 1824, demonstrou que "exceto em casos particulares, de um modo geral é impossível resolvê-las utilizando-se apenas as operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão e radiciação)" (GARBI, 1997, p.153).

Em virtude da importância do resultado obtido, Abel recebeu uma pequena bolsa do *Conselho Universitário da Universidade de Oslo*, que lhe permitiu viajar para a Alemanha, Itália e França. Mesmo durante suas viagens, Abel continuava produzindo e neste período "escreveu vários artigos em diversas áreas da matemática como a da convergência de séries infinitas, a das integrais *abelianas* e a das funções elípticas" (EVES, 1995, p.553).

Na criação e sistematização do estudo das funções elípticas obtidas como funções inversas das integrais elípticas, foi também grande a contribuição do alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) que trabalhou de forma independente, embora simultaneamente, a Abel. O significado dos estudos de Abel e Jacobi sobre as funções elípticas extrapola a questão simplesmente de conteúdos matemáticos, pois retrata mais um capítulo da *libertação* da matemática do real ao torná-la independente das ciências naturais, particularmente, da mecânica e da astronomia.

Ao produzir conhecimentos de interesse apenas da própria ciência, caiu por terra a concepção vigente de que a finalidade principal da matemática seria a explicação dos fenômenos naturais e sua aplicação no cotidiano das pessoas. Face às diversas críticas que receberam, Jacobi se pronunciou na defesa da pesquisa pura contra a pesquisa aplicada em matemática: "a única finalidade da ciência é a honra do espírito humano e, em conseqüência, uma questão da teoria dos números tem um valor tão grande como uma questão acerca do sistema dos mundos". (BABINI, 1969, p.122)

Assim, quase que ao mesmo tempo em que as geometrias não-euclidianas se desprendiam do mundo físico, a análise se liberta das ciências naturais, e o "grito de autonomia da matemática havia sido dado" (BABINI, 1969, p.122)

O principal continuador da obra de Abel e Jacobi sobre as funções elípticas foi o alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897). Além de diversos trabalhos sobre integrais hiperelípticas, funções abelianas e equações diferenciais algébricas, Weirstrass contribuiu grandemente com a teoria das funções complexas por meio de séries de potências. O matemático alemão foi também um dos precursores da redução dos princípios da análise ao conceito de número real, um dos principais passos da *aritmetização da análise*.

Weirstrass trabalhou com questões vinculadas aos fundamentos da aritmética, como o "teorema final da aritmética", segundo o qual não existe nenhum sistema de números complexos com mais de duas unidades e na fundamentação dos números reais, "problema que não havia sofrido modificações essenciais desde a teoria (baseada em magnitudes geométricas) de Eudoxo". (BABINI, 1969, p.123)

Com o trabalho de Weierstrass a aritmetização da análise se completa, em meados do século XIX, com o advento da *passagem ao limite*, operação de natureza peculiar que se localiza nas fronteiras entre a aritmética (teoria dos números) e a geometria (grandezas irracionais) em suas duas formas características: mediante o infinito enumerável e o infinito contínuo, respectivamente.

Assim, mediante uma definição específica e um uso adequado desta operação, os métodos infinitesimais que tiveram suas origens nos trabalhos de Newton e Leibniz e cujos alicerces foram investigados por Lagrange, encontram uma base sólida, de natureza aritmética, na qual sustentar-se.

A aritmetização da análise afastou de vez "as brumas metafísicas que durante todo o século XVIII haviam obscurecido os fundamentos da análise" (BABINI, 1969, p.124).

Se a geometria passou a ser considerada uma criação do espírito humano e a análise tornou-se independente das ciências naturais, a "libertação" da álgebra também foi procurada neste fantástico século matemático.

2.2.3 AS ÁLGEBRAS NÃO COMUTATIVAS

Um dos progressos algébricos mais importantes do século XIX aconteceu na teoria das equações algébricas com a demonstração da impossibilidade de se resolver a equação do quinto grau (e de graus superiores) mediante o uso de radicais. O primeiro passo havia sido dado em 1798 pelo italiano Paolo Ruffini (1765-1822), porém, a demonstração rigorosa e geral se deve, como já mencionado, a Abel.

O estudo da resolubilidade das equações algébricas de grau superior deu origem a um dos conceitos fundamentais da matemática contemporânea, o conceito de *grupo*, presente também na física teórica, conceito este a que Piaget se refere e utiliza com freqüência.

> Fundamento da álgebra, a estrutura de grupo revelou-se de uma generalidade e de uma fecundidade extraordinárias.

> Encontramo-la em quase todos os domínios das matemáticas e na lógica; adquiriu uma importância extraordinária na física e é provável que o mesmo acontecerá um dia em relação à biologia. (PIAGET, 1979, p.19)

O estudo sistemático da teoria dos grupos, tal como hoje se apresenta se iniciou com o francês Évariste Galois (1811–1832), um gênio matemático “de primeira ordem que, tal como um cometa, desapareceu tão rapidamente como tinha aparecido”, pois, uma armação política, envolvendo um suposto caso amoroso, resultou em sua morte, aos 21 anos, num duelo a pistolas. Muitos de seus trabalhos foram publicados apenas após a sua morte por Joseph Liouville (1809-1882), em 1846, no *Jornal de Mathématique.* (STRUICK, 1992, p.244).

Na véspera do duelo, convicto de sua morte, Galois escreveu a um amigo uma espécie de “testamento científico”, contendo um resumo das suas descobertas na teoria das equações e, terminava com um apelo: “Contata Jacobi ou Gauss para darem sua opinião não sobre a verdade, mas sobre a importância dos teoremas. Depois existirá alguém, espero, que ache vantajoso decifrar todo esse emaranhado”. Este “emaranhado” exigiu, posteriormente, o esforço de diversos matemáticos para ser devidamente esmiuçado e continha nada menos que a “chave da álgebra e da geometria moderna”, a teoria dos grupos (STRUICK, 1992, p.244).

> Uma avaliação completa das realizações de Galois, nos seus escassos 21 anos de vida, só foi realizada em torno de 1870, ‘quando Camille Jordan (1838-1902) as expôs em seu livro *Traité des Substitutions* e mais tarde ainda, quando Felix Klein e Saphus Lie (1842-1899) brilhantemente fizeram uso delas na geometria’. (EVES, 1995, p.535)

Galois foi o pioneiro no uso da palavra *grupo* (1830) em seu sentido técnico e, com o trabalho de diversos outros matemáticos, como Cauchy, Cayley, Lie, Klein, Poincaré, a teoria dos grupos penetrou nos diversos campos da matemática, exercendo o papel de codificador na geometria e, “em álgebra serviu como uma estrutura atômica de coesão, fator de grande importância para a ascensão da álgebra abstrata do século XX” (EVES, 1995, p.535).

Considerada como uma das grandes realizações da matemática no século XIX, a teoria dos grupos ainda é, atualmente, um campo de pesquisas fecundo.

Assim como a análise e a geometria que, não apenas avançaram em seus conteúdos específicos, como retornaram aos seus próprios fundamentos, a álgebra do século XIX também enveredou por caminhos outros além da teoria dos grupos, como a *análise dos conceitos fundamentais*. Esta teoria, ao dar origem a novos sistemas de entes matemáticos, cujas operações não satisfazem totalmente as leis da álgebra ordinária, promove a *libertação* da álgebra da sua forma comum da aritmética.

Assim como ocorreu com as geometrias não-euclidianas, com a idéia de que a soma dos ângulos internos de um triângulo poderia ser diferente de dois retos escandalizando os matemáticos, a possibilidade de uma álgebra consistente na qual a *comutatividade da multiplicação*, isto é, onde $a \times b \neq b \times a$, não se verificasse, “não ocorria a ninguém na época, como também, se ocorresse, certamente seria descartada por parecer uma idéia ridícula” (EVES, 1995, p.535).

Foi isto, porém, o que aconteceu quando, em 1843, William Rowan Hamilton (1805-1865), depois de muito tempo debruçado sobre um problema particular da física, estabeleceu uma álgebra em que a lei comutativa não valia.

O sistema criado por Hamilton é a *álgebra vetorial* oriunda da intenção de ampliar para o espaço a representação plana dos números complexos ordinários. Especificamente falando, o sistema criado por Hamilton é o dos *quatérnios*, que são números de quatro unidades, no qual são válidas todas as propriedades das operações fundamentais da aritmética, exceção feita à comutatividade da multiplicação. Ampliando esses estudos outros matemáticos chegaram ao estabelecimento da álgebra vetorial.

Um outro exemplo de álgebra não-comutativa é a álgebra das matrizes, descoberta pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895).

> Desenvolvendo álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, Hamilton, Grassmann e Cayley abriram as comportas da álgebra abstrata. De fato, enfraquecendo, suprimindo ou substituindo um ou mais postulados por outros consistentes com os demais, pode-se estudar uma enorme variedade

> de sistemas. Esses sistemas incluem grupóides, semigrupos, monóides, grupos, anéis, domínios de integridade, reticulados, anéis de divisão, anéis booleanos, álgebras booleanas, corpos, espaços vetoriais, álgebras de Jordan e álgebras de Lie, sendo os dois últimos exemplos de álgebras não associativas. Provavelmente é correto dizer que os matemáticos estudaram, até hoje, mais do que 200 dessas estruturas algébricas. A maior parte deste trabalho se deu no século XX e reflete o espírito de abstração e generalização que prevalece atualmente na matemática. A álgebra tornou-se o vocabulário da matemática dos dias de hoje e foi apelidada 'a chave-mestra da matemática'. (EVES, 1995, p.553)

2.2.4 Começam as controvérsias acerca do número...

A redução da análise aos conceitos matemáticos mais simples não se concluiu com os trabalhos de Weierstrass. Na verdade, a aritmetização da análise foi típica da escola de Berlim onde se destacaram Cantor e Leopold Kronecker.

Leopold Kronecker (1823-1891) nasceu em Liegnitz e após concluir seus estudos na Universidade de Bonn, atuou no mundo dos negócios de 1844 a 1855 e, graças a um incomum talento para as finanças amealhou considerável fortuna.

Em 1855 mudou-se para Berlim e em 1861 ingressou como professor na universidade local, constituindo com Kummer e Weierstrass o sustentáculo da matemática local. Suas principais contribuições foram na teoria das funções elípticas, na teoria das equações e na teoria dos números algébricos. Seus trabalhos acerca da teoria dos números algébricos "são exposições cuidadosas de suas descobertas anteriores e mostram claramente a sua crença na necessidade de aritmetizar as matemáticas" (STRUICK, 1992, p. 258).

Kronecker acreditava que toda matemática deveria se fundar sobre o conceito de número natural, único tipo de número cuja existência seria inquestionável e com ele se inicia uma tendência sobre os fundamentos da matemática que seria denominada no século XX de *intuicionismo*. Existe, todavia, uma *diferença básica* entre Kronecker e os *intuicionistas* do século XX. Para estes últimos, os números naturais são resultado de uma *intuição básica*, enquanto que para o alemão, um pitagórico do século XIX, eles constituíam um *ato de fé*.

É sobejamente conhecida a afirmação de Kronecker, proferida em um congresso em Berlim, no ano de 1886: “O bom Deus criou o número natural, o resto é obra humana”. É comentando esta afirmação que Piaget inicia a parte destinada à epistemologia das matemáticas na sua obra *Epistemologia Genética*, pois entendia que Kronecker havia reconhecido que o *número natural constitui a gênese pré-científica da matemática*:

> Quando chamou os ‘números naturais’ de um presente do Bom Deus, tendo os homens fabricado todo o resto, Kronecker reservou de imediato esse papel à gênese pré-científica mas sem se aperceber suficientemente de que esta, analisável nas sociedades primitivas, nas crianças e outros representantes do Bom Deus (não esqueçamos os periquitos de Otto Kohler), era de natureza bastante análoga ao trabalho ulterior dos próprios matemáticos: as correspondências biunívocas introduzidas por Cantor para fundar a teoria dos conjuntos são conhecidas desde os tempos imemoráveis na troca direta de um contra um, e sua formação pode ser acompanhada de perto na criança e mesmo em certos vertebrados superiores. (PIAGET, 1990, p.77)

Outro matemático importante para a aritmetização da análise foi Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845-1918). Ele nasceu em São Petersburgo, na Rússia, filho de pais dinamarqueses e desenvolveu parte das suas atividades no século XIX e parte no século XX. Quando Cantor tinha onze anos, sua família transferiu-se para Frankfurt, na Alemanha tendo, portanto, sido educado em escolas alemãs.

Produto de um lar religiosamente controvertido, pois o pai era um judeu convertido ao protestantismo e sua mãe era católica, “tomou-se de um profundo interesse pela teologia medieval e seus argumentos intrincados sobre o contínuo e o infinito”. Isto influenciou sobremaneira em sua opção profissional, decidindo estudar filosofia, física e matemática em lugar de engenharia, que era o desejo de seu pai. Ensinou em Halle, de 1869 até 1905 e ali faleceu, em 1918, no sanatório da cidade (EVES, 1995, p.615).

Em diversos artigos, cujas publicações se iniciaram em 1879 e continuaram até muito tempo depois, Cantor desenvolveu “a teoria dos números *transfinitos*, baseado num tratamento matemático do infinito atual”, e deste modo, foi possível estabelecer uma aritmética dos números transfinitos análoga à aritmética dos mundos finitos. Definiu também, números ordinais transfinitos expressando assim, a existência de uma ordem para os infinitos.

O trabalho de Cantor, ao refletir sua simpatia pelas especulações medievais acerca da natureza do infinito, encontrou fortes oposições, particularmente de Kronecker que, por recusar a aceitar a idéia de infinito diferente do atual, considerava Cantor como um herege e resolutamente se opôs aos esforços deste último em lecionar na Universidade de Berlim, reduto do alemão.

Na verdade, ambos buscavam a aritmetização da análise, cada um, porém, assentado em bases diferentes.

A controvérsia do século XX entre os formalistas, liderados por Hilbert e os intuicionistas, partidários de Brouwer, nada mais era que uma continuação da controvérsia, num outro patamar, entre Cantor e Kronecker (EVES, 1995, p.615).

Jules Henri Poincaré (1854-1912) é considerado o matemático mais importante deste período transitório entre os séculos XIX e XX. Nasceu em Nancy, na França, numa família influente que, destinou à humanidade várias figuras ilustres entre estadistas e cientistas, como por exemplo, seu primo Raymond Poincaré, que foi presidente da França durante a I Guerra Mundial além de um de seus irmãos, F. Poincaré, que foi um importante físico.

Graduou-se na *Escola Politécnica* em 1875; na *Escola de Minas* (como engenheiro de minas) em 1879, mesmo ano em que, aos 25 anos, obteve seu doutorado em ciências, na *Universidade de Paris*. Trabalhou por dois anos como professor na *Universidade de Caen* e após "transferiu-se para a Universidade de Paris, onde ocupou várias cadeiras nas áreas de matemática e ciências, até sua morte em 1912" (EVES, 1995, p.288).

> Nenhum matemático da sua época dominou tal variedade de assuntos e foi capaz de os enriquecer a todos. Cada ano dava lições sobre um assunto diferente; estas lições foram editadas pelos estudantes e cobrem um campo enorme: teoria do potencial, luz, eletricidade, condução do calor, capilaridade, eletromagnetismo, hidrodinâmica, mecânica celeste, termodinâmica, probabilidades. Cada uma destas lições era brilhante à sua maneira; juntas apresentam idéias que deram frutos nos trabalhos de outros, enquanto muitas ainda esperam uma elaboração futura. (STRUICK, 1992, p.289-290).

Como nunca se preocupou em permanecer e se aprofundar num determinado campo por muito tempo, saltando de uma área para outra intermitentemente, Poincaré foi descrito por seus contemporâneos como "um conquistador e não um colonizador" (EVES, 1995, p.617).

Interessou-se pelas geometrias não-euclidianas, mas, ao contrário do fato posteriormente comprovado, de que todas possuíam o mesmo grau de veracidade, preocupou-se sobremaneira em descobrir qual a "verdadeira geometria". Isto, segundo Piaget, pode ter sido o fato que impediu Poincaré de *descobrir* a teoria da Relatividade.

Poincaré aceitava o conceito kantiano de juízo sintético *a priori* para a matemática e se valia da aritmética dos números inteiros, que considerava como o domínio no qual a matemática conserva sua pureza máxima, para fundamentar a sua crença. Mediante a análise desse ramo em particular, concluiu que a *rainha das ciências* não podia ser puramente analítica, pois constrói combinações de complexidade crescente. O principal instrumento dessa construção seria, para Poincaré, o *princípio da recorrência.*[5]

Como o princípio da recorrência só é possível em virtude da certeza que se tem de poder repetir indefinidamente a primeira operação realizada, "há nesta passagem do particular ao geral certa analogia, donde a designação de *indução completa* que alguns autores dão ao método". Não se trata, todavia, de uma indução, mas de uma dedução progressiva e rigorosa que justifica a freqüente utilização em matemática (COSTA, 1971, p.94).

Bastante influenciado pelo sistema kantiano Poincaré, porém, não se contentava apenas com o fato de que os postulados matemáticos fossem juízos sintéticos *a priori*, era preciso, também, que os conceitos aos quais se referissem correspondessem a certas intuições materiais, intuições estas que são indispensáveis à construção da ciência. Assim, tal como em Kant, a matemática para Poincaré se apóia em *intuições*, dentre elas, a de número, razão pela qual, é considerado um dos "fundadores" do intuicionismo.

---

[5] "Se um teorema é verdadeiro para o número **um** e se do fato de ser verdadeiro para o número **n** decorre necessariamente que o seja para o número **n+1**, o teorema é verdadeiro para um número inteiro qualquer".

O número possui o duplo caráter de conceito puro e de forma intuitiva. É conceito puro enquanto esquema do conceito de grandeza, ou seja, “é a parte sem a qual não se pode passar da grandeza pura à sua imagem no espaço e no tempo”. É forma intuitiva, porque representa a seqüência aditiva de uma unidade à outra unidade e “realiza a síntese de um mesmo objeto no espaço e no tempo” (COSTA, 1971, p.94).

Ao concluir que o princípio de recorrência é sintético porque não se reduz à lógica do princípio da não contradição e *a priori* porque só poderia ser provado mediante um número infinito de experiências, o que é impossível, Poincaré enxergou no método matemático um elemento intuitivo. Para ele, uma *intuição*, como o número, possuía o duplo sentido de “fonte de noções puras ou como instinto inventivo”. Como “fonte de noções puras”, a intuição direciona o espírito para a noção de número inteiro e, como instinto inventivo, impulsiona o profundo trabalho do espírito na descoberta científica (COSTA, 1971, p.93).

Assim, para Poincaré o número possui um caráter sintético e irredutível, enquanto que para Russell, conforme será explicitado posteriormente, o número cardinal será a “classe das classes”, o que retrata a oposição existente entre as correntes de pensamento matemático: logicismo e intuicionismo, que, juntamente com o formalismo de Hilbert, pretenderam resolver a “crise dos fundamentos” no século XX.

Piaget assim se expressa a respeito das relações entre a aritmética (base do intuicionismo) e da lógica (alicerce do logicismo) e da solução por ele proposta, de que a sucessão dos números constitui-se na síntese operatória da classificação e da seriação.

> Sabe-se bem, com efeito, quantas discussões o problema das relações entre o número e a lógica ocasionou, com os logísticos procurando, com Russell, conduzir o número cardinal à noção de ‘classe de classes’ e o número ordinal, dissociado do primeiro, à de classe de relações, enquanto seus adversários mantinham, como H. Poincaré e L. Brunschvicg, o caráter sintético e irredutível do número inteiro. É verdade que nossa hipótese, num certo sentido, permite escapar a essa alternativa, porque se o número é classe e relação assimétrica ao mesmo tempo, ele não deriva de tal ou qual das operações lógicas particulares, mas somente da sua reunião, o que concilia a continuidade

> com a irredutibilidade e leva a conceber como recíprocas e não mais como unilaterais as relações entre a lógica e a aritmética. Delas não convinha menos verificar sobre o próprio terreno logístico as conexões assim estabelecidas pela experimentação psicológica e foi o que logo tentamos. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.13).

Muitos fatos e matemáticos importantes do século XIX deixaram de ser aqui mencionados, todavia, o que destacamos são os fatos e personagens que foram fundamentais na construção do *contexto teórico* em que se situam as pesquisas de Piaget e Szeminska que resultaram no livro *A gênese do número na criança*.

2.3 O SÉCULO XX

É difícil poder separar, com precisão, quais as principais contribuições dos matemáticos do século XX em virtude de sua proximidade com o momento atual, o que impossibilita verificar as conseqüências dos feitos realizados neste período. Assim, à exceção da demonstração do último teorema de Fermat, por Andrew Wyles e que pode ser considerado um grande feito pela notoriedade do problema, são destacados aqui apenas três pontos, todos referentes à primeira metade do século e cujas repercussões já são facilmente percebidas: 1) o aparecimento dos *Principia Mathematica*, de Russell e Whitehead, considerado por Grize, como o ponto culminante do desenvolvimento da lógica; 2) o desenrolar da crise dos fundamentos, desencadeada no final do século XIX e, 3) a descoberta das estruturas elementares, por Nicolas Bourbaki.

Para contextualizar o surgimento dos *Principia Mathematica*, enveredamos, rapidamente pela história da lógica; pelas suas diferentes formas e pelas suas relações com a matemática.

2.3.1 A LÓGICA

Pode-se dizer que o início da lógica se dá com os pitagóricos devido ao fato de que Pitágoras (582-500 a C.) e alguns de seus discípulos foram os primeiros a se preocuparem em demonstrar suas idéias. Eles conseguiram mostrar, em alguns casos específicos, que as mesmas eram verdadeiras sem que tivessem que recorrer à observação para isso. É o caso específico da descoberta comprovada dos números irracionais.

Como a palavra *logos*, que dá origem à palavra lógica, significa ao mesmo tempo discurso e razão, desde a sua origem, aparecem dois campos bem distintos de exercício da lógica: o da *matemática* e o da *retórica*. Foram os *eleatas* Parmênides e Zenão os primeiros pensadores a estabelecer relações entre a coerência do pensamento e a forma em que é exposto pelo discurso.

Os *sofistas* fizeram as primeiras análises do discurso e Platão, as primeiras análises do raciocínio, o que não tira, todavia, de Aristóteles, a paternidade da lógica, uma vez que foi ele, o primeiro a formalizar os resultados já existentes e o criador do primeiro formalismo lógico, o *silogismo.* (BOLL, REINHART, 1946)

Aristóteles (384-322 a.C.) foi, com certeza, um dos maiores cérebros da Antiguidade. A sua obra, considerada no contexto de sua época, é notável, porém ela não teve uma continuidade satisfatória, pois não foi criticada ou complementada. Ao contrário, na Idade Média as verdades dogmáticas e a lógica aristotélica tinham o mesmo *status*.

A lógica formal ou clássica devida a Aristóteles determina quais são, entre as operações do espírito (formação dos conceitos, dos juízos, dos raciocínios), as que são válidas e as que não o são. Essa determinação de validade se fundamenta apenas na forma de maneira independente dos conteúdos das operações, estudando, conseqüentemente suas propriedades, suas condições de implicação ou de exclusão e os seus modos de encadeamento.

A lógica aristotélica se opunha à escola *megárico-estóica*. A supremacia em termos de aceitação e difusão da primeira fez com que a segunda, até recentemente, permanecesse praticamente desconhecida e relegada a um segundo plano.

Na lógica *megárico-estóica* pode-se encontrar o esboço de uma lógica seqüencial. As proposições lógicas são formadas por palavras da linguagem corrente e "sua base é o pensamento como se encontra expresso na linguagem natural, que fornece as leis e as regras formais" (BASTOS; KELLER, 1998, p.16).

Os *estóicos* e *megáricos* utilizavam uma nomenclatura diferente da de Aristóteles dando a falsa impressão de que seu trabalho é completamente diverso do realizado pelo filósofo de Estagira. Na verdade, segundo se sabe hoje, os estóicos e megáricos desenvolveram aspectos diferentes dos desenvolvidos pela escola aristotélica, de modo que, não se encontra nos estudos realizados pela escola megárico-estóica nada daquilo que era examinado por Aristóteles e seus seguidores. Depois do período dos estóicos, a lógica permaneceu praticamente intacta. Não surgiram novos problemas e o que se procurava era apenas «aperfeiçoar certas técnicas e a maneira de se ensinar lógica. (HEGENBERG, 1977, p.23).

Até o século IX d.C., praticamente nada de novo se produziu, porém, a partir do século IX e até o século XV d. C, o período é de grande atividade. É importante frisar que os principais registros deste período referem-se à lógica ocidental, já que a árabe e a judaica continuam até os dias atuais, praticamente desconhecidas. Além disso, quase nada se sabe dos séculos XIV e XV.

Nesse período os medievais estabeleceram uma periodização para a forma *escolástica* que permite identificar um período de estagnação, e mesmo decadência, que se prolonga até o que pode ser considerado o início da forma escolástica da lógica, representada pela *Ars vetus*, de Abelardo (1079-1142).

A preocupação central desse período foi o trabalho com as categorias aristotélicas e mesmo com a própria interpretação da lógica do mestre de Estagira. O único problema novo trabalhado nessa época, dizia respeito às propriedades dos termos (HEGENBERG, 1977, p.23).

Após esse período de estagnação, é possível identificar certa vitalidade caracterizada pela *Ars nova* e que tem como principais representantes Petrus Hispanus, um lisboeta nascido entre 1210 e 1220, Alberto Magno (1193-1280) e Tomás de Aquino (1227-1274). O objetivo principal que norteava tais estudos era fortalecer o ensino da ortodoxia católica.

O terceiro período, o da *lógica modernorum*, caracterizou-se pela sistematização iniciada com Guilherme de Occam (1295-1350) que culminou com a elaboração de uma lógica formal e semiótica. Esse período se prolongou até o fim da Idade Média (século XV).

A partir do século XVII três tendências especiais de pensamento influenciaram as ciências e as artes: a do *humanismo*, a do *classicismo* e a das *inovações esboçadas*. Durante o

Renascimento, de maneira geral, o principal interesse estava em descobrir novos métodos que pudessem auxiliar a pesquisa cientifica. Assim, coube à matemática orientar os novos rumos da pesquisa, fundamentando seus métodos. Nesse período a lógica era considerada estéril e concluída por Aristóteles.

É apenas na segunda metade do século XVII, com Leibniz (1646-1716), que começa a procura de uma característica universal, adaptada a todas as formas de pensamento. As idéias extremamente inovadoras de Leibniz só viriam a ser reconhecidas e convenientemente apreciadas ao final do século XIX, fazendo com que passasse a ser considerado o pioneiro da lógica matemática contemporânea.

Os séculos XVII, XVIII e a primeira parte do século XIX pouco contribuíram para o desenvolvimento da lógica, entretanto, como a principal preocupação deste período era a criação de uma *Scientia universalis* e de uma *Língua rationalis*, muitos pesquisadores se empenharam na criação de uma língua universal, contribuindo, ainda que de forma indireta com o desenvolvimento da lógica. De qualquer forma, é a Leibniz que se deve o "ter claramente concebido e parcialmente esboçado duas formas da lógica moderna: a de uma linguagem artificial, desprovida de toda ambigüidade, e a de uma manipulação regrada dos símbolos" (GRIZE, 1980, p.120).

O desenvolvimento da lógica ganhou novo impulso e uma fase de grande vitalidade a partir do trabalho de George Boole (1815-1864), iniciando um novo período da história da lógica: a *lógica matemática*.

As lógicas elaboradas pelos filósofos antigos e pelos lógicos da Idade Média apresentam quatro características essenciais. São *bivalentes*, isto é, obedecem ao princípio aristotélico do terceiro excluído, admitindo como valores lógicos apenas o verdadeiro e o falso; são *normativas*, no sentido de que se deva evitar o falso e buscar o verdadeiro; não possuem uma linguagem própria fazendo uso da linguagem ordinária e, por último, estão vinculadas a uma *metafísica existencialista*, isto é, a própria realidade dos seres é expressa por conceitos lógicos.

Com o aparecimento da álgebra na Idade Média estas características começam a se alterar, particularmente com os princípios da lógica simbólica estabelecidos por Leibniz. A construção, porém, de uma lógica formal livre dos problemas que impediram o desenvolvimento da lógica clássica, só se efetivaria a partir do século XIX, com o conjunto dos trabalhos de diversos pensadores, dos quais os mais importantes, sem dúvida, foram Boole, De Morgan, Frege e Peano.

O trabalho "inaugural" dos novos rumos dos estudos da lógica foi a obra de Boole (1815-1864), *The mathematical analysis of logic*, publicada em 1847 e que contém a maior parte das idéias mestras de uma matematização nascente da lógica, cuja constituição se completaria com a publicação, em 1854, das *Investigations of layes of thought*. Neste último trabalho Boole comparou as leis do pensamento às leis da álgebra e estabeleceu uma álgebra das operações mentais, isto é, uma *álgebra da lógica*. É com Boole que, pela primeira vez, a lógica das classes recebe um tratamento explícito.

Os resultados de Boole foram aperfeiçoados por S. Jevons e por J. Venn, cujos trabalhos marcam o fim de um período na história da lógica simbólica, entretanto, embora o corpo da doutrina que eles constituíram fosse muito mais rigoroso e compreensivo do que a lógica clássica, não se distingue essencialmente desta sendo, no fundo, uma "transposição algébrica da silogística". Em função disso, os resultados de Boole, Jevons e Venn tiveram importância quase nula para a matemática, não fosse o desenvolvimento de estudos mais modernos (COSTA, 1971, p.206).

Esses estudos originaram-se com E. Schroeder e, principalmente, com Charles Peirce. Ambos esboçaram o cálculo das relações entrevisto por Leibniz e, a seguir, os trabalhos de Frege, Peano, Russell e Whitehead completaram, por fim, a álgebra da lógica.

No final do século XIX, mais especificamente em torno de 1880, com a "crise dos fundamentos" que se instaurou em função das diversas concepções de número, as relações entre lógica e matemática se invertem: se antes o que se viu com Boole e seus seguidores foi uma *matematização da lógica*, isto é, procurava-se uma linguagem para a lógica que utilizasse os símbolos e operações matemáticas, agora com Frege, Peano, Russell e Whitehead têm-se uma *logicização da matemática*, com a tradução da linguagem basilar da matemática para a lógica.

De maneira geral Frege (1848-1925) teve como interesse principal em seus estudos o projeto de redução da aritmética à lógica. Para realizar tão ambicioso projeto o alemão Frege pretendia a consecução de dois grandes objetivos: o primeiro seria definir toda expressão aritmética em termos lógicos e com isso mostrar que a toda expressão aritmética equivale uma expressão lógica determinada. Caso conseguisse realizar tal tarefa, o segundo objetivo seria mostrar que as proposições lógicas obtidas poderiam ser deduzidas de leis lógicas imediatamente evidentes.

Assim, desde 1879 e aparentemente sem ter tido conhecimento do trabalho de Boole, constatando que os conceitos de sujeito e predicado da lógica podem ser substituídos com vantagem pelos de argumento e função, Frege procurou fundamentar logicamente a matemática. Seu trabalho mais importante foi *Grundlagen der Arthmetik* (*Os fundamentos da Aritmética*), publicado em 1884 e nele Frege pretendia mostrar que a aritmética poderia ser construída somente a partir das leis da lógica sem o recurso de enunciados empíricos.

A lógica clássica era duplamente insuficiente para a consecução dos objetivos de Frege, por ser incompleta, uma vez que as relações e as propriedades aritméticas seriam muito mais complexas que as relações e propriedades lógicas possíveis de serem representadas pela lógica clássica. Além disso, a lógica clássica não seria formalizada o suficiente, estando impregnada de imperfeições originadas da imprecisão da linguagem comum. Havia, portanto, a necessidade de uma nova lógica e a esse trabalho, Frege dedicou-se com afinco.

Procurando mostrar que a aritmética poderia ser considerada como um ramo da lógica e que as suas demonstrações não necessitavam fundamentarem-se na experiência ou na intuição, Frege eliminou qualquer recurso à intuição e à linguagem comum. Observou, então, que a matemática necessitava de uma profunda revisão crítica, como nunca acontecera antes.

O lógico alemão acreditava serem necessárias demonstrações de proposições que anteriormente se aceitavam como evidentes; conceitos relativamente novos, como de função, de contínuo, de limite, de infinito, etc., precisavam ser aprofundados. De maneira geral eram necessários, em todos os campos da matemática, rigor de demonstração, delimitação precisa da validade dos conceitos e sua exata definição, a partir já, do próprio conceito de número.

Devido à forma nova e excessivamente filosófica na qual se expressava, Frege não encontrou muito eco para o seu programa até que este fosse acatado por B. Russell. A partir daí, a redução da matemática à lógica tornou-se um dos principais objetivos dos matemáticos do século XX (BOYER, 1974).

A Itália, palco de grande desenvolvimento das ciências em séculos anteriores, pouco participou do desenvolvimento da álgebra abstrata ocorrido na França, Inglaterra e Alemanha. Entretanto, no final do século XIX, alguns matemáticos italianos se interessaram profundamente pela lógica matemática. O mais importante deles foi, seguramente, Giuseppe Peano (1858-1932), de cujos axiomas dependem inúmeras construções rigorosas da álgebra e da análise.

Os estudos de Peano são bastante conhecidos e constituem um verdadeiro divisor de águas na história da matemática, pois até então, o interesse dos estudiosos era a lógica pela lógica, enquanto que com o italiano e seus seguidores, a "lógica simbólica procura tornar-se, sobretudo o instrumento da demonstração matemática" (COSTA, 1971, p.207).

A linguagem ordinária passou a ser inteiramente substituída por esse simbolismo ideográfico e, a escola italiana caracterizou-se tanto pela utilização sistemática desse simbolismo quanto pelo tratamento independente de cada ramo da matemática.

Em Peano, o método postulacional "atingiu um novo nível de precisão, sem ambigüidade de sentido e sem hipóteses ocultas". Por ter também se esforçado muito no desenvolvimento da lógica simbólica.

Peano exerceu, juntamente com Frege, enorme influência sobre as pesquisas de B. Russell (1872-1970) e A. Whitehead (1861-1947) (BOYER, 1974, p.437).

Russell e Whitehead retomaram a tese de Frege e procuraram demonstrar que a matemática pura (incluídas aí a geometria e a própria dinâmica racional) poderia ser inteiramente deduzida da lógica. Na obra *Principia Mathematica* que pode ser considerada uma das principais deste século e marca o ponto culminante do desenvolvimento da lógica, Russell e Whitehead desenvolveram, por completo, o cálculo das relações.

A realização desse intenso trabalho foi sistematizada em três livros fundamentais, o primeiro, de Whitehead, *A treatise on universal algebra*, publicado em 1898, com a exposição dos princípios matemáticos ainda apoiada sobre o cálculo das classes; no segundo, de autoria de Russell, *The Principles of Mathematics*, aparecem os princípios do cálculo das relações e o terceiro, os *Principia Mathematica*, escrito por ambos, completa a lógica das classes e das relações e concebe a matemática como um sistema lógico-formal.

Embora até então tivessem sido tratadas, historicamente falando, como estudos distintos, com a matemática sempre relacionada às ciências e a lógica ao idioma grego, o desenvolvimento de ambas durante o século XIX e início do século XX aproximou definitivamente lógica e matemática. Com a lógica se tornando cada vez mais matemática e a matemática cada vez mais lógica, Russell considerava ser inteiramente impossível traçar uma linha entre as duas: "na verdade, as duas são uma. Diferem entre si como rapaz e homem: a lógica é a juventude da matemática e a matemática é a maturidade da lógica" (RUSSEL, 1974, p.186).

Russell e Whitehead procuraram demonstrar nos três volumes dos *Principia*, publicados entre 1910 e 1913 que "toda a matemática pura se funda sobre conceitos inteiramente definíveis em termos dos conceitos lógicos primitivos", com suas proposições derivando de postulados admitidos (COSTA, 1971, p.214).

Russell e Whitehead não formalizaram inteiramente o seu sistema que "parece ter encontrado mais aprovação entre lógicos do que entre matemáticos". Além disso, a importância do sistema constituído diminuiu consideravelmente devido a uma "surpreendente conclusão por parte de um jovem matemático austríaco, Kürt Gödel", discípulo de Hilbert. Ao demonstrar que mesmo "dentro de um sistema rigidamente lógico" como o construído por Russell e Whitehead para a aritmética ainda podem ser formulados enunciados que não podem ser "provados ou negados", Gödel deixou evidente a existência de lacunas no sistema, pois não seria possível, "usando os métodos usuais, ter certeza de que os axiomas da aritmética não levarão a contradições" (BOYER, 1974, p.444).

Para Grize (1980, p.121) “a clareza que acompanhava os *Principia* permitiu tomar consciência dos mecanismos em jogo e pensar na construção de sistemas diferentes”. A maioria desses sistemas busca por uma lógica que não seja apenas bivalente, isto é, onde as proposições não devam ser necessariamente verdadeiras ou falsas e, portanto, que não obedecesse ao principio do terceiro excluído. Mesmo antes do resultado de Gödel, Lukasiewcz, em 1920, já imaginava a possibilidade de uma lógica assim.

Com o intuicionismo de Brouwer surgindo em oposição ao logicismo russelliano, a matemática passou a ser encarada como uma “construção de entidades abstratas”, cujo ponto de partida era a intuição do matemático, prescindindo, portanto, de uma redução à linguagem especial que é a Lógica ou de uma formalização rigorosa em um sistema dedutivo.

Os intuicionistas não respeitavam o princípio do terceiro excluído e, em 1930, Heyting publicou um opúsculo com o objetivo de explicitar os procedimentos de raciocínio usados por Brouwer. Entretanto, simultaneamente, existia a clareza de que “qualquer que seja o sistema lógico proposto” existem alguns metaproblemas sobre os quais é preciso refletir. Os mais importantes metaproblemas referiam-se à sua coerência (ou não contradição) e à sua completude. Post provou, em 1921 que o “cálculo das proposições dos *Principia* gozava destas duas propriedades” e, em 1928, “Hilbert e Ackermann, mostram a não-contradição da lógica elementar dos predicados”. (GRIZE, 1980, p. 122)

Outras investigações tiveram início a partir daí como os trabalhos de Tarski e Carnap que deslocaram o eixo das questões dos aspectos sintáticos para os semânticos e discutiram problemas filosóficos em função de técnicas lógicas. Curry, em 1930, se dedicou a reconstruir a lógica sem a utilização de variáveis criando, para isso, a lógica combinatória. (GRIZE, 1980)

Os problemas dos fundamentos, todavia, não perderam a importância para os lógicos e os metaproblemas ainda não estavam resolvidos. Eram estes, portanto, o cenário e o instrumental lógico que dispunha Piaget para a consecução de seus trabalhos.

2.3.1.1 A LÓGICA OPERATÓRIA DE JEAN PIAGET

Ao pretender que as operações lógico-matemáticas procedam diretamente das ações mais gerais que o sujeito exerce sobre os objetos, ou grupos de objetos, Piaget buscava fundar a lógica na psicologia genética e são várias as obras em que trata da questão, apresentando não uma “nova” lógica, mas uma interpretação particular da mesma que importa ser mencionada. Como neste tópico foi tratada a lógica matemática, ou lógica simbólica, entendeu-se ser pertinente o tratamento, na seqüência, da interpretação piagetiana da lógica.

Na introdução à segunda edição do seu *Traìtée du logique*, publicada em 1970, na França e em 1976, no Brasil com o título de *Ensaio de lógica operatória*, tradução do subtítulo em francês, Jean Piaget (1896-1980), esclarece que tal subtítulo deixa clara sua intenção que é, “essencialmente mostrar como se constroem as formas lógicas”.

Da mesma forma como considerava o conhecimento, Piaget entendia a formalização, isto é, como um processo que se apóia em estruturas que se elaboram segundo níveis. Ao buscar dentre tais estruturas, as mais elementares, mas que já permitissem o estabelecimento de inferências válidas, Piaget as encontrou nas operações de classificação e de seriação, que representariam o estágio mais simples da lógica das classes e das relações, sistematizadas por Russell e Whitehead.

Ao analisar tais estruturas, Piaget constatou que elas não constituíam ainda as “redes’’, que são o fundamento da lógica proposicional de Boole ou da lógica de classes: “uma classificação só se processa, com efeito, por encaixes sucessivos (ou ‘contíguos’) e não admite ‘conjunto das partes’ ou simplexo, como acontece no caso da combinatória proposicional”. É esta falta de mobilidade que impede que a classificação possa ser considerada como um *grupo*, no sentido matemático do termo. (PIAGET, 1976, p. xvii)

A classificação, ao se processar por encaixes da mesma forma que as seriações ou estruturas multiplicativas correspondentes, apresenta certos caracteres constantes de composição que permitem falar numa estrutura de conjunto que é muito comum no pensamento “natural” pré-científico ou ainda nas disciplinas que são simplesmente descritivas. Piaget designou tal estrutura por *agrupamento*.

Num agrupamento está definida a operação *identidade*; as operações possuem as propriedades *associativa*, *transitiva* e *tautológica* e, além disso, são *reversíveis*. O fato de a propriedade tautológica ser verdadeira num agrupamento faz com que este permaneça muito próximo de seu conteúdo qualitativo e, portanto, lógico, tornando seu estudo de particular interesse para quem, como Piaget, procurava pelo elementar.

Os lógicos, independentemente da escola a que pertençam, concordam num ponto: que o objeto da lógica refere-se ao verdadeiro ou falso. Em virtude deste acordo, Piaget estabeleceu a sua *primeira aproximação* para a definição de lógica: "*a lógica é o estudo do conhecimento verdadeiro, considerado em suas formas mais gerais*" (PIAGET, 1976, p.3).

Entretanto, existem dois enfoques possíveis para o estudo do conhecimento: o da relação entre o sujeito e o objeto e o do estudo do conhecimento na sua forma pura, isto é, de como o sujeito estabelece a distinção entre o verdadeiro e o falso. Piaget chama de *epistemologia* ao estudo do conhecimento enquanto relação entre sujeito e objeto e, de *lógica* à análise do conhecimento puro. Em outras palavras, a lógica consistiria na a *análise formal* do conhecimento.

Assim, a *lógica estuda o modo como os dados são enunciados por proposições* e como estas se encadeiam entre si, num domínio interior à atividade do sujeito, sem considerar a intervenção dos objetos. Para isso é fundamental que seja estabelecido, com clareza, que o verdadeiro e o falso de que trata a lógica são formais.

Uma outra questão destacada por Piaget é o fato, também aceito por todos os lógicos, de que a lógica "está interessada na forma pura e não trata, de modo algum, do próprio objeto", o qual seria de interesse das ciências experimentais e da psicologia. Ora, Piaget indaga então, sobre essa "forma", colocando como questão prévia saber se é uma forma normativa, isto é, um conjunto de regras e valores, ou se seria "uma estrutura prescrita por leis necessárias e não por imperativos" (PIAGET, 1976, p7).

Os estudiosos dividem-se e ambas as posições são sustentadas. Para alguns, como Lalande, a lógica é essencialmente normativa, enquanto que para outros, as composições formais tratadas pela lógica, constituem uma estrutura idealizada e esquematizada, "mas cujas transformações são acessíveis ao cálculo, levando às mesmas constatações mentais de qualquer combinatória" (PIAGET, 1976, p. 7).

Para Piaget, os dois pontos de vista não são excludentes, ao contrário, são complementares e dizem respeito apenas "à sua significação epistemológica sem afetar a sua técnica". Dessa forma é possível falar tanto de proposições verdadeiras ou falsas, (no caso da lógica normativa, isto é, de valores prescritos), como de positivas ou negativas (para o caso de simples relações combinatórias), o que significa, em outras palavras, que "toda composição formal é redutível a uma mesma estrutura abstrata". (PIAGET, 1976, p7-8)

Mas, do mesmo modo que foi necessário estabelecer com clareza, o que se quer dizer com o termo "forma", precisa ficar claro sobre estrutura de quê se está falando, ou como indaga Piaget, "de quê as 'formas' lógicas constituem regras ou leis?".

Para os que consideram a lógica uma pura sintaxe, tais "formas" seriam o "conjunto das coordenações próprias a uma língua bem elaborada". Assim consideradas, as formas ou estruturas lógicas, permitiriam, "ao mesmo tempo, signos e operações de inferência que se aplicam a estes signos para conferir-lhes significações relativas às suas próprias combinações" (PIAGET, 1976, p8).

Mas tais fatos levariam à segunda interpretação possível para as "formas ou estruturas lógicas", a de que elas exprimem as leis do pensamento, não as leis causais ou temporais, mas aquelas que regulam as atividades do sujeito para o estabelecimento de relações verdadeiras ou falsas. As estruturas lógicas podem ser consideradas como "exprimindo as operações do pensamento", de onde Piaget chega à sua *segunda aproximação*: lógica seria a "*teoria formal das operações do pensamento*". (PIAGET, 1976, p9)

Essa caracterização apresenta, porém, dois inconvenientes, é o dos limites entre a lógica e a psicologia e o outro, o dos limites entre a lógica e a matemática. Com esses cuidados, a definição seria satisfatória, uma vez que engloba tanto a lógica clássica, que trata dos enunciados verbais (e, portanto, dos resultados estáticos das operações), quanto à lógica moderna reduzida essencialmente ao cálculo (exprimindo, portanto, operações como tais).

Para resolver esses inconvenientes, Piaget estabeleceu sua *terceira aproximação*, que já exprime com clareza, sua interpretação particular desse ramo do saber: "*a lógica é a teoria formal das operações dedutivas*" (PIAGET, 1976, p19).

A definição de lógica estabelecida por Piaget, segundo o próprio, "designa na realidade, apenas um ideal", pois, apesar da lógica ser uma teoria formal, não é formal no sentido acabado, mas formalizante ou formalizadora das operações dedutivas.

Ao se colocar que o essencial da lógica é a dedução parece ser desnecessário se tratar da questão dos métodos, entretanto, segundo Piaget, pode-se trabalhar "entre construções que parecem, segundo critérios a serem analisados minuciosamente, mais ou menos naturais e reconstruções mais artificiais, mas mais puras". Além disso, o ponto de partida também pode diferir já que é possível começar tanto "por cima" (lógica das proposições), quanto "por baixo" (classes e relações) (PIAGET, 1976, p21).

Ao se falar de métodos em lógica, três pontos devem ser considerados: a técnica de formalização; o atomismo lógico ou a determinação de totalidades e a ordem natural de formalização.

Atualmente, é ponto pacífico que sem os algoritmos a constituição da lógica não acontece, pois só mediante uma álgebra é possível garantir a formalização progressiva, em oposição ao estado semiformalizado obtido pela lógica formal de técnica verbal. Esta unanimidade, todavia, é recente. Segundo Piaget (1976), ainda em 1918, Goblot discriminava entre a "lógica dedutiva" e a "lógica indutiva" e não se admitia a existência de um terceiro campo, que tratasse especificamente da técnica de formalização, a logística de hoje.

Quanto ao segundo aspecto, há a necessidade de saber o que é mais natural para a lógica, proceder por combinações a partir de elementos isolados, ou por análise das leis pertinentes às estruturas de conjunto.

Tanto na psicologia, como na matemática, cresceu a importância das totalidades operatórias com suas propriedades de conjunto, e das operações reais em jogo no pensamento em ação, nas sistematizações das operações abstratas.

Na matemática, os números, por exemplo, não são estudados independentemente uns dos outros, mas sim, as estruturas que eles constituem (de grupo, anel ou corpo); os conjuntos constituem seqüências “bem ordenadas”, ou “redes”, cujas propriedades aparecem na “totalidade” (um grupo e seus subgrupos constituem um caso particular de “rede”).

É esta tendência estruturalista da matemática devida ao grupo dos Bourbaki, que estabelece as maiores diferenças entre as pesquisas contemporâneas e as dos períodos anteriores, de características muito mais analíticas.

Do ponto de vista psicológico também é impossível a análise de fatos isolados. É até possível dissociá-los, mas sem se esquecer que cada fato repousa, necessariamente, sobre uma organização englobando um grande número de conexões com outros fatos. As percepções, por exemplo, só alcançam relações interdependentes e servem de indícios ou sinais para ações. As operações do pensamento não se constituem de forma isolada, “mas apoiando-se umas sobre as outras em sistemas caracterizados por sua composição reversível e não poderia, pois, haver classe ou relação sem referência a classificações, seriações, etc.” (PIAGET, 1976, p27).

A lógica, por sua vez, ao ter na axiomatização e não na construção operatória progressiva a principal preocupação, continua atomística. Em conseqüência, os lógicos estudam isoladamente as operações de classes e de relações sem abordarem as estruturas tão características que elas constituem na sua totalidade, como os agrupamentos, por exemplo.

A lógica das proposições é estudada como combinatória, procedendo a partir da análise das diferentes composições e, apesar da correspondência clara entre a lógica das classes e das proposições, tudo é feito como se fossem dissociadas e para dissociá-las.

Para Piaget, pelo fato das estruturas desempenharem um papel tão importante tanto no domínio (abstrato) da matemática, quanto no domínio (concreto) das operações mentais, seria legítimo esperar que existissem também estruturas puramente lógicas semelhantes. É esta “descoberta”, a de que tais totalidades não só existem como também que a sua “intervenção permite ordenar os resultados de uma forma mais natural do que a análise atomística", que confere a Piaget uma interpretação tão peculiar à lógica. Os resultados, as fórmulas são os mesmos; a dedução continua presente, mas o "método" utilizado e a ordem de estudo (ele começa pela lógica das classes e das relações, ao invés da lógica das proposições), são outros.

Boole e De Morgan, os fundadores da lógica moderna (e que partiram da comparação com as leis do pensamento), também iniciavam pela lógica de classes. É apenas com o desenvolvimento da lógica simbólica que o cálculo proposicional retorna ao início do estudo da lógica. Tarski, por exemplo, começa pelo cálculo proposicional. Ambos caminhos, todavia, levam a exposições igualmente rigorosas, e a opção por um deles deve-se a considerações extra-lógicas. Um dos principais colaboradores de Piaget no estudo da lógica, Jean-Baptiste Grize começa também pelas classes, por considerar a lógica como integrante do "conjunto das atividades humanas" (GRIZE, 1980, p.124).

Ainda segundo Grize (1980), tanto de um ponto de vista genético como de um ponto de vista histórico, as atividades primeiras são atividades de classificação e justifica: "a criança manipula coisas, constitui-as mesmo enquanto tais, muito antes de falar". Do ponto de vista histórico, "todas as ciências naturais se iniciaram por uma taxiologia" e, mesmo no interior da própria lógica, a imperiosidade dos silogismos é conseqüência do fato deles exprimirem classificações subjacentes, em termos de proposições, ou seja, não seria possível se concluir pela mortalidade de Sócrates, "se a classe dos homens não estivesse incluída na classe dos mortais" (GRIZE, 1980, p.124).

Piaget entendia a lógica como uma disciplina situada entre a psicologia e a matemática, definindo-a como a teoria formal das operações dedutiva e com uma técnica de formalização (ou logística) na qual os algoritmos constituem condição *sine qua non*. Em função dessa concepção, para ele, a lógica devia ser estudada em função da determinação das totalidades e seguindo a ordem natural de formalização. Isto significa, então, começar o estudo pela lógica de classes e das relações, isto é, "do mais concreto para o mais abstrato".

Ao se estabelecer que a lógica é a teoria formal das operações dedutivas, a psicologia, ou pelo menos parte dela, pode ser considerada como a “teoria real das próprias operações”, sejam estas efetuadas pelo indivíduo isoladamente ou em conjunto e compartilhadas mediante o uso da linguagem.

A princípio pode parecer que os pontos de vista da lógica e o da psicologia sejam inteiramente distintos, pois a única preocupação da lógica é o da validade das composições operatórias e sua finalidade essencial é “enunciar os princípios ou axiomas necessários e suficientes para garantir o rigor dos encadeamentos operatórios estudados”. Para a psicologia, entretanto, o problema consiste não só em “estabelecer as leis das operações da ação ou do pensamento”, mas também em explicá-las (PIAGET, 1976, p.11).

Assim, enquanto o problema da lógica é “fundamentar” a validade formal das composições operatórias, a psicologia para “explicar” deverá compreender e reconstituir geneticamente essas composições.

Embora teoricamente a delimitação entre os campos da lógica e da psicologia seja meridiana e hoje, inquestionável, nem sempre foi assim.

Consideradas sob o ponto de vista lógico as operações são transformações que possibilitam o estabelecimento de proposições ou relações partindo de proposições ou relações anteriores, e “transformações cuja validade é prescrita pela aceitação (ou rejeição) de certos axiomas”. Psicologicamente, as operações são ações equilibradas que têm sua origem nas atividades concretas do sujeito e isto significa dizer (e esta é a tese demonstrada por Piaget, em toda sua obra), que existe uma continuidade entre as “ações sensório-motoras e as ações efetivas, depois entre estas e as ações interiorizadas, ou atos simbólicos que caracterizam o pensamento” (PIAGET, 1976, p.11).

Com a evolução dos dois ramos de conhecimento, a psicologia passou a estudar geneticamente a inteligência e a lógica a formalizar a estrutura das construções operatórias. Dessa forma, os dois campos de conhecimento diferenciaram-se completamente excluindo qualquer imbricação e, exatamente por isso, tornando-se complementares ou mesmo correspondentes em alguns domínios, como no caso das classificações, das seriações, das correspondências e do número.

Entretanto, apesar da existência de correspondência entre os problemas da lógica e da psicologia, a independência dos métodos é total, uma vez que um dado psicológico não pode ser invocado numa formalização lógica, pois ela é autônoma, mesmo quando se refere às normas que são aceitas pelo indivíduo em particular ou pelo grupo social.

Reciprocamente, um raciocínio fundamentado num algoritmo formal não possui a validade de um fato da experiência, em psicologia.

Se nas suas origens a lógica, por referir-se ao discurso e às leis do pensamento, estava intrinsecamente ligada à psicologia, se dissociando dessa última somente a partir da segunda metade do século XIX, em relação à matemática, ela caminhou no sentido inverso.

De fato, a lógica aristotélica por ser eminentemente verbal, mantinha apenas relações distantes com a matemática embora esta última fosse anterior à primeira. Por outro lado, a matemática essencialmente intuitiva de então, também não se interessava pela lógica.

Assim, a evolução da lógica, no sentido de se tornar simbólica, a aproxima gradual e incessantemente da matemática, na mesma medida que e por igual motivo, a afasta da psicologia.

O duplo processo de aproximação entre lógica e matemática (matematização da lógica e logicização da matemática), deram origem a duas espécies de problemas, completamente independentes entre si, um, o da "convergência entre os métodos logísticos e matemáticos", e o outro, o da "redução eventual das estruturas matemáticas às estruturas lógicas". Esses problemas eram freqüentemente confundidos, principalmente "à época em que a força e a influência de Russell tendiam a uni-los" (PIAGET, 1976, p.16).

O problema da redução das estruturas matemáticas às estruturas lógicas não tem sua origem, como poderia parecer, na convergência dos métodos, mas, antes, nos trabalhos de G. Cantor. Foi a teoria dos conjuntos que promoveu o encontro das "partes mais gerais da matemática e a álgebra das classes e das relações", motivando tanto Frege quanto Russell em suas tentativas de definição do número cardinal, reduzindo-o à classe lógica e do número ordinal, reduzindo-o à relação assimétrica (PIAGET, 1976, p.16).

Assim, devido à dupla influência da fusão dos métodos e da convergência entre partes da lógica com partes mais gerais da matemática, cresceu a tendência de se fundir (e confundir) as duas áreas numa só. Esse esforço, todavia, não era unanimidade entre lógicos e matemáticos, ao contrário, é possível perceber a presença de quatro escolas que pretendem a fusão, mas com princípios diferenciados.

Hilbert com seu formalismo concebeu as relações lógicas como uma subclasse dos seres matemáticos, não considerando, portanto, a matemática como redutível à lógica.

Russell admitiu exatamente o oposto, ou seja, a matemática seria redutível à lógica (donde o seu logicismo).

A própria história da matemática demonstrou a impossibilidade dessas duas interpretações.

Piaget (1976, p.17) destaca ainda a possibilidade de se conceber tanto a matemática como a lógica, como "duas subclasses separadas da grande classe das estruturas formais ou abstratas", o que seria impossível, tendo em vista a existência inconteste de estruturas comuns a ambas.

Finalmente, pode-se conceber uma separação parcial entre as estruturas lógicas e as matemáticas, porém, "constituindo uma parte comum por assimilações recíprocas (e não mais em um sentido único)". Piaget entende as relações entre lógica e matemática desta última forma, como "assimilações recíprocas" (PIAGET, 1976, p.17).

Para finalizar aquilo que estamos chamando de "interpretação piagetiana da lógica", resta tratar da axiomatização das estruturas operatórias do sujeito.

Ao se entender formalização como um processo e não como um estado a principal conseqüência a aparecer é a de que o desenvolvimento da lógica formal jamais estará concluído. Além disso, este desenvolvimento não consistiria apenas em se acrescentar conhecimentos novos, cumulativamente aos precedentes, mas, em "reconstruções devidas a exigências não estabelecidas de início, mas que surgem durante o percurso" (PIAGET et al, 1980, p.321).

Para Piaget (1980), é impossível, do ponto de vista genético, dissociar a lógica de sua própria construção e da sua própria história, pois o que a lógica formal axiomatiza é, precisamente, uma certa atividade do sujeito, começando pelo próprio lógico, que intuitivamente estabelece os seus sistemas antes de os poder formalizar. Ao se defrontar com os limites das suas próprias formalizações o lógico continua suas construções, o que associa, definitivamente, a lógica à sua própria história. Não se pode desprezar o fato de que o lógico, enquanto indivíduo é depositário de uma herança psicossocial de longa tradição e herdeiro de "uma seqüência de construções reflexivas mais simples" que remontam a um nível semiformalizado semelhante ao da lógica aristotélica considerado, entretanto, por muito tempo, como o "acabamento da lógica na sua totalidade" (PIAGET et al, 1980, p.322).

Assim, a lógica pode ser considerada a axiomatização de certos tipos de pensamento operatório, que podem ser, nos níveis superiores, operações abstratas. Ora, mas tais "operações abstratas" foram, por sua vez, "abstraídas" de operações de níveis menos evoluídos, que foram "abstraídas" de outras, até que sejam, como no caso da lógica clássica, extraídas de operações proposicionais que repousam em operações de inclusões de classes ou de encadeamento de relações. Entretanto, ao se pretender a reconstituição das filiações históricas, não se pode remontar muito atrás e, assim, na falta desses dados, Piaget recorre às informações psicogenéticas, seguindo, passo a passo, a partir do estágio sensório-motor, a constituição das estruturas operatórias do pensamento, do que resulta que:

I - As operações elementares têm origem nas ações do sujeito, as quais, por sua vez, começam por incidir sobre os próprios objetos físicos, desenrolando-se num contexto que Piaget qualifica globalmente como "experiência". Entretanto, o autor chama a atenção para o fato de que existem duas espécies de componentes (que não derivam uma da outra), em qualquer experiência: a física e a lógico-matemática.

A experiência física consiste em extrair as propriedades dos objetos através de uma abstração simples, a partir de informações perceptivas e a lógico-matemática consiste em extrair as informações não dos objetos como tais, mas das propriedades que "as ações introduzem nos objetos". Pode-se, resumidamente dizer que as informações perceptivas são conseqüências das ações enquanto que as lógico-matemáticas resultam das coordenações das ações. (PIAGET et al, 1980, p.323)

A forma de abstração envolvida na experiência lógico-matemática não é mais a simples, como a que é usada na experiência física, mas sim, é uma abstração reflexionante, no duplo sentido do termo: "extrair as propriedades das ações é, num primeiro momento, 'transpor' para um novo plano (portanto refletir, no sentido quase físico do termo)", o que ainda é apenas uma coordenação prática e inconsciente, posteriormente transformada em "objeto de tomada de consciência e de pensamento". Entretanto, esta reflexão ou projeção, pressupõe uma nova estruturação, e conseqüentemente, uma "reflexão no sentido psicológico do termo" (PIAGET et al, 1980, p.323).

A experiência lógico-matemática existe e é necessária para a criança mesmo quando esta se encontra num nível em que ainda não é capaz nem de operar e nem de deduzir mediante normas ou regras. Para Piaget, caracterizada como foi, não é possível entender a experiência lógico-matemática como uma experiência interior ou psicológica, no sentido de uma introspecção dos dados da consciência. Embora sua origem esteja nas atividades do sujeito sobre o objeto, a experiência lógico-matemática não depende apenas da memória do sujeito, sobre as experiências realizadas com o objeto, mas, da abstração reflexionante que ao utilizar o aspecto lógico-matemático dessas experiências, torna-se uma construção, bem diferente de uma simples leitura ou registro passivo de informações.

II - A abstração reflexionante é, portanto, uma construção que se efetiva por etapas, nas quais acontece uma progressiva eliminação de sucessões temporais em benefício de conexões necessárias e não-temporais.

Assim, a inteligência só conseguirá se libertar do tempo (que está irremediavelmente ligado às ações psicológicas), ao conquistar a reversibilidade, característica das operações. Tornadas estritamente reversíveis, as ações ou operações constituirão um jogo de conexões simultaneamente intemporais e logicamente necessárias e esta constituição obedece a quatro estágios de desenvolvimento, que são os estabelecidos pela epistemologia genética: o período sensório-motor, o intuitivo ou pré-operatório, o operatório concreto e o lógico-formal.

As estruturas operatórias, portanto, são constituídas graças aos progressos da reversibilidade que lhes proporciona o caráter extra-temporal. As conexões extra-temporais estabelecidas, fornecerão, em função do desenrolar contínuo das abstrações reflexionantes, o “dado cuja axiomatização é efetuada pela lógica dos lógicos”. Para compreender como tal formalização efetivamente prolonga a construção genética, é necessário compreender como essas ligações se tornam necessárias (PIAGET et al, 1980, p.327).

III - É o aparecimento da necessidade lógica que constitui o principal problema da psicogênese das estruturas operatórias. Mediante a realização de inúmeras pesquisas em diversos setores, tais como construção do espaço, do tempo, do número, etc., Piaget e seus colaboradores verificaram que a necessidade lógica aparece com a constituição das operações quando as ações tornam-se estritamente reversíveis. Para se constituir as operações se coordenam entre si, sob a forma de estrutura de conjunto, com a necessidade surgindo do fechamento dessas estruturas. Com tal fechamento e a implicação entre os elementos, as estruturas de conjunto constituem agrupamentos ou mesmo grupos e a composição entre os elementos torna-se necessária.

Piaget, frente às considerações anteriores, conclui que “a lógica é uma axiomatização das estruturas operatórias do pensamento do sujeito, estruturas estas, aliás, estudadas a título de fatos pela psicologia da inteligência”. O autor chama atenção, entretanto, para a necessidade de se precisar algumas expressões para que esta interpretação de lógica possa ser aceita ser restrições (PIAGET et al, 1980, p.331).

Inicialmente, é necessário deixar claro que são as estruturas operatórias subjacentes e não dados os introspectivos da consciência que são axiomatizadas pela lógica. Tal precisão é necessária, porque se a lógica do sujeito for reduzida ao que se encontra em sua consciência, serão encontrados elementos muito mais elementares do que os “que são inconscientemente utilizados nos raciocínios efetivos”. Isto acontece porque a consciência se remete apenas aos resultados dos processos mentais, não incidindo “sobre seus mecanismos mais simples” (PIAGET et al, 1980, p.331).

Um outro aspecto que Piaget enfatiza, é a distinção entre axiomática e axiomatização. Para o autor, uma axiomática “consiste em demonstrar, através de uma formalização adequada um resultado já adquirido intuitivamente”, enquanto que por axiomatização, deve ser entendido “uma livre construção formalizada, que não se limita a axiomatizar sistemas prévios”, mas sim, que constrói as suas próprias teorias. Esta construção, entretanto, não é arbitrária e não parte do nada, uma vez que utiliza, “no mínimo, certas noções operatórias indefiníveis e certas proposições não-demonstráveis” (PIAGET et al, 1980, p.332).

As estruturas subjacentes do pensamento natural e, portanto, do pensamento do próprio lógico, procedem de um desenvolvimento cujas formas elementares são claramente observadas na evolução mental da criança, e as suas formas mais elevadas já comportam, além da psicogênese, uma sociogênese. Assim, para serem elaboradas, as estruturas elementares necessitam tanto das condições psiconeurológicas comuns à espécie, como da atividade intelectual realizada pelas sucessivas gerações.

As pesquisas realizadas por Piaget e seus colaboradores comprovaram que é perfeitamente possível entender a lógica como uma axiomatização das estruturas operatórias subjacentes do pensamento humano. E, se as relações entre a lógica moderna (a lógica sem sujeito) e as estruturas subjacentes, estudadas pela psicologia, pareceram ser inexistentes por muito tempo, deve-se, principalmente, ao desconhecimento das estruturas elementares pela própria psicologia, ao longo tempo de permanência da lógica na silogística de Aristóteles e ao distanciamento entre a lógica moderna e a própria matemática.

O fato dos lógicos contemporâneos caracterizarem a lógica moderna como uma linguagem (e não existe língua sem sujeito), reforça a existência de um isomorfismo entre a lógica e as estruturas operatórias do sujeito.

2.3.2 AS PRINCIPAIS CORRENTES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Por quase todo o século XIX, o mito de Euclides era inabalável tanto para os filósofos, como para os matemáticos, com a geometria sendo considerada por todos, “como o mais firme e confiável ramo do conhecimento”.A descoberta das geometrias não-euclidianas, contudo, implicou na perda da certeza da geometria, abalando, conseqüentemente, não só os alicerces da matemática, mas, de todo o conhecimento (DAVIS; HERSH, p. 1986, p.371).

Os matemáticos do século XIX enfrentaram o problema e buscaram uma outra fonte segura para fundamentar seus trabalhos, elegendo a aritmética como a “nova base sólida” (de onde surgiu, o movimento de “aritmetização da análise”). Porém, ao alicerçar a matemática sobre a aritmética, se estava, em última instância, fundamentando-a sobre o número.

Entra, então, em cena, o matemático alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), para quem a matemática necessitava de uma profunda revisão crítica, revisão esta, que se impunha a partir do próprio conceito de número.

Além da perda de credibilidade da geometria como base sólida, é preciso recordar, que, praticamente na mesma época, apareceram as várias antinomias da teoria dos conjuntos estabelecida por G. Cantor que abalaram todo o edifício matemático, o que fortalecia a idéia de Frege, de que apenas uma análise minuciosa dos fundamentos da matemática “graças ao novo instrumento lógico, poderia salvar a coerência das matemáticas” (GRIZE, 1980, p. 121).

Estava desencadeada a que ficou conhecida como “a crise dos fundamentos” e surgiram diversas correntes buscando soluções para os profundos problemas. Os objetivos destas correntes se resumiam em tornar a matemática, novamente, uma ciência confiável. Três delas se destacaram e continuam, até hoje, a dividirem os matemáticos.

Na transição do século XIX para o século XX, começaram a acontecer congressos internacionais de matemática (o primeiro foi em Chicago, em 1893) e, no segundo, realizado na cidade de Paris, em 1900, o matemático alemão David Hilbert, proferiu a conferência principal.

Nessa conferência Hilbert apresentou uma lista com 23 problemas os quais, segundo ele, seriam o foco das atenções dos matemáticos do século XX (o que de fato aconteceu e quase todos já foram resolvidos). No mesmo congresso, Poincaré apresentou um trabalho em que comparava os papéis da lógica e da intuição na matemática.

Matemático de interesses variados, Hilbert contribuiu para a teoria dos números, lógica matemática, equações diferenciais e física matemática. Devido a um trabalho acerca dos fundamentos da matemática Hilbert se envolveu, com Poincaré, numa das maiores controvérsias do século e que, praticamente, prolongava o conflito estabelecido entre Cantor e Krönecker, no século XIX.

> Hilbert admirava o *Mengenlehre* de Cantor, ao passo que Poincaré o criticava fortemente. As teorias de Cantor, como os abstratos espaços de Hilbert, pareciam muito afastados da base intuitivo-empírica que Poincaré e alguns de seus contemporâneos preferiam. (BOYER, 1974, p.448)

A partir daí, os matemáticos da época passaram a se agrupar em torno de três principais correntes de pensamento: o intuicionismo de Poincaré, o formalismo de Hilbert e o Logicismo, de Russell, esta última, ligada ao formalismo (ambas valorizam a lógica), mas não identificada com ele.

> A tese do logicismo é que a matemática é um ramo da lógica. Assim, a lógica, em vez de ser apenas um instrumento da matemática, passa a ser considerada como a geradora da matemática. Todos os conceitos da matemática têm que ser formulados em termos de conceitos lógicos e todos os teoremas da matemática têm que ser desenvolvidos como teoremas da lógica; a distinção entre matemática e lógica passa a ser uma questão de conveniência prática. (EVES, 1995, p.677)

Os logicistas eram liderados por Bertrand Russell e pretendiam derivar, inicialmente, as leis da aritmética e, posteriormente, toda a matemática, das leis da lógica aristotélica, de acordo com as idéias de Frege. Porém, como a lógica aristotélica se mostrou insuficiente para tais propósitos mesmo com a inclusão dos resultados de Leibniz, Russell criou a teoria dos tipos, com a qual pretendia resolver também algumas das antinomias.

A natureza lógica dos pressupostos da teoria dos tipos foi muito contestada, tendo sido, inclusive, acusada de ser uma solução "*ad hoc*" para os problemas encontrados e não a expressão de uma necessidade lógica universal. Assim, a tarefa de reduzir a matemática à lógica tornou-se inviável. Ambas continuaram convivendo como ramos de conhecimento intimamente ligados, porém, independentes.

O intuicionismo de Poincaré ganhou força como corrente quando o holandês L. E. J. Brouwer (1881-1966) conseguiu reunir em torno das idéias intuicionistas, os oposicionistas do formalismo de Hilbert e do logicismo de Russell. Para os seguidores do intuicionismo, os elementos e axiomas da matemática não são tão arbitrários como possam parecer.

Segundo Brouwer, "a linguagem e a lógica não são pressuposições para a matemática, a qual tem sua origem na intuição que torna seus conceitos e inferências imediatamente claros para nós" (BOYER, 1974, p.448).

> A tese do intuicionismo é que a matemática tem de ser desenvolvida apenas por métodos construtivos finitos sobre a seqüência dos números naturais, dada intuitivamente. Logo, por essa visão, a base última da matemática jaz sobre uma intuição primitiva, aliada, sem dúvida, ao nosso senso temporal de antes e depois, que nos permite conceber um objeto, depois mais um, depois outro mais e assim por diante, indefinidamente. Dessa maneira obtêm-se seqüências infindáveis, a mais conhecida das quais é a dos números naturais. A partir dessa base intuitiva (a seqüência dos números naturais), a elaboração de qualquer outro objeto matemático deve ser feita necessariamente por processos construtivos, mediante um número finito de passos ou operações. Na tese intuicionista o desenvolvimento genético da matemática é levado a extremos. (EVES, 1995, p.679)

Segundo Machado (1987), o intuicionismo, considera a matemática como uma atividade autônoma, uma construção de entidades abstratas a partir da intuição dos matemáticos e como tal prescinde tanto de uma redução à lógica, quanto de uma formalização rigorosa em um sistema dedutivo, o que era defendido por Hilbert e seus seguidores.

O embrião da escola formalista foi um estudo postulacional realizado por Hilbert sobre a geometria, em 1899, no qual aprimorou o método matemático, desde a axiomática, considerada material, dos tempos de Euclides, à axiomática formal do século XX.

Algum tempo depois, buscando solucionar a crise instaurada pelas antinomias na teoria dos conjuntos de Cantor (cujas idéias ele defendia) e, para responder ao desafio da matemática clássica que foi estabelecido pelos intuicionistas, Hilbert se dedicou seriamente à elaboração do programa formalista.

> A tese do formalismo é que a matemática é, essencialmente, o estudo dos sistemas simbólicos formais. De fato, o formalismo considera a matemática como uma coleção de

> desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos; a base mais funda da matemática não está plantada na lógica mas apenas numa coleção de sinais ou símbolos pré-lógicos e num conjunto de operações com esses sinais. Como, por esse ponto de vista, a matemática carece de conteúdo concreto e contém apenas elementos simbólicos ideais, a demonstração da consistência dos vários ramos da matemática constitui uma parte importante e necessária do programa formalista. Sem o acompanhamento dessa demonstração de consistência, todo o estudo perde fundamentalmente o sentido. Na tese formalista se tem o desenvolvimento axiomático da matemática levado a seu extremo. (EVES, 1995, p.682)

O sucesso ou o fracasso do programa formalista estava vinculado, portanto, à resolução do problema de consistência. O sonho dos seguidores do formalismo teve curta existência. Em 1931, como já foi dito o então jovem matemático Kurt Gödel, discípulo de Hilbert, provou, de maneira considerada inconteste por seguidores das três principais correntes do pensamento matemático, que não era possível provar a consistência de um sistema dedutivo formalizado capaz de abranger toda a matemática clássica, com todos os seus princípios lógicos, conforme era idealizado por Hilbert. Dessa maneira o debate acerca dos fundamentos da matemática se centralizou em torno do logicismo e do intuicionismo.

2.3.3 O CAOS TEÓRICO DAS DIVERSAS CONCEPÇÕES DE NÚMERO

A imensa maioria dos textos consultados referentes à construção do número que procuram reproduzir ou apenas se fundamentar na teoria piagetiana apresenta o número como “a síntese da classificação e da seriação” não deixando, todavia, transparecer o processo de construção estreitamente solidário das três estruturas. Este processo, que culmina com a síntese do número e com as operações lógicas e aritméticas constituindo um único sistema total e psicologicamente natural. Nesse sistema total, as operações aritméticas aparecem a partir da generalização e fusão das operações lógicas. Não será este, porém, o motivo da discussão a seguir.

Analisando o livro *A gênese do número na criança* fica evidente que os autores confirmaram a hipótese não explicitamente colocada inicialmente, de que o número seria a síntese operatória da seriação e da classificação. Ora, o que teria motivado Piaget a elaborar implicitamente tal hipótese?

Entra em cena, então, o forte apelo epistemológico das soluções insatisfatórias para a questão "o que é número?" e, particularmente, o longo e antigo debate, sem vencedor, entre logicistas e intuicionistas. Tudo isto, mesclado às próprias convicções de Piaget de que o conhecimento não está nem no sujeito (apriorismo, implícito no logicismo) e nem no objeto (empirismo, pano de fundo do intuicionismo), mas na interação entre ambos, uma interação particular que acontece internamente ao sujeito.

Da mesma forma como sua concepção de inteligência pode ser considerada como um *tertium* entre o lamarckismo e o neodarwinismo; que a sua posição acerca da construção do conhecimento fica a meio-caminho entre o empirismo e o apriorismo, ele termina por considerar o número também como uma espécie de *tertium* entre Russell e Poincaré, ao "conceber como recíprocas e não mais unilaterais a relação entre a lógica e a aritmética".

Com o caos epistemológico instalado para a definição de número, evidenciando divergências entre as diversas soluções propostas (além da insuficiência destas), Piaget entendeu ser oportuna e pertinente uma investigação genética.

2.3.3.1 As teorias empiristas

Das soluções com fundamento teórico empírico destacam-se duas: a da experiência mental de E. Mach (1917) e E. Rignano (1913-1916) e a da experiência anterior determinada pelos estados de consciência de H. Helmholtz.

E. Mach, e E. Rignano, embora trabalhando separadamente, pretenderam explicar o aspecto cardinal do número mediante a "experiência mental", entendendo-se por esta última expressão a imaginação, através do pensamento, da variação dos fatos, ou, em outras palavras, a "imitação em pensamento de uma situação". A experiência mental seria possível graças a experiências anteriormente adquiridas.

Mach considerava que a construção do conceito de número era realizada mediante experiências reais de reunião, disjunção, ordenamento e correspondência, que depois seriam recordadas pela experiência mental.

Os conjuntos de diversas ordens formados pela experiência real e recordados pela experiência mental seriam então manipulados pela imaginação para gerar as operações da aritmética. O cálculo seria constituindo-se num prolongamento da numeração efetiva pelo pensamento como “um meio indireto de contar”. De acordo com tal teoria (ampliada por Rignano), o raciocínio seria constituído por uma sucessão de experiências pensadas (MACH, *apud* PIAGET, 1975, p. 68).

Ora, mas tanto na análise genética como na teoria da experiência mental está presente uma interpretação psicológica do conceito de número e, então, é lícito indagar, no que seriam diferentes.

Apesar de toda experiência executada materialmente poder ser interiorizada e, reciprocamente, do pensamento, por mais abstrato que seja repousar sempre sobre esta mentalização das ações, a experiência mental não é, por si só, a solução de problemas epistemológicos.

> [...] de fato, assim como é necessário se perguntar em cada domínio delimitado, no que consiste a experiência e quais são, em sua constituição as partes que correspondem, respectivamente, à atividade do sujeito e aos dados objetivos, assim toda ‘experiência mental’ apresenta o mesmo conjunto de problemas epistemológicos ao invés de resolvê-los apenas com sua presença. (PIAGET, 1975, p.69)

Para analisar qual é a parte relativa ao sujeito e qual a referente aos dados objetivos na experiência mental é preciso distinguir, primeiramente, se existe diferentes tipos de experiências mentais.

De acordo com Piaget (1975), existem dois tipos de experiências mentais que ele denominou de I e II, com as do tipo II subdividindo-se em IIA e IIB.

As experiências mentais do tipo I são as que consistem simplesmente em imaginar uma realidade exterior ao sujeito; as do tipo II, em imaginar não apenas as variações dos fatos, mas, também, as ações do sujeito que faz variar os fatos e isto, desde as ações mal-diferenciadas que, por serem insuficientemente coordenadas entre si, precisam de apoio da realidade exterior para a previsão de resultados (IIA), até as ações reversíveis (operações), capazes de antecipações precisas (IIB).

Imaginar as variações dos fatos não é, todavia, o mesmo que imaginar as ações do sujeito que provoca tais variações. Mesmo em se tratando de experiências do tipo II, não existe diferença se uma transformação operada pela ação do sujeito foi efetivada materialmente ou em pensamento, pois, em última instância, esta será sempre uma atividade dos objetos, uma mudança externa, mesmo quando “imaginada”, não se tratando de uma transformação do sujeito. Esta situação já evidencia uma primeira diferença com a epistemologia genética, pois para esta o conhecimento só acontece quando, além da transformação do objeto (assimilação), há também a transformação do sujeito (acomodação).

Embora tanto a análise genética quanto a teoria baseada na experiência mental defendam uma interpretação psicológica para o conceito de número elas não são, portanto, a mesma coisa. E isso, mesmo com as especificações estabelecidas por Piaget para os diferentes tipos de experiência mental, coisa que Mach e Rignano não reconheceram, passando sem cessar da variação dos fatos à representação mental das ações do sujeito e, conseqüentemente, ampliando o fosso entre as duas concepções.

É verdade que o número é construído a partir das ações (como o conhecimento em geral) a diferença para a análise genética é que estas ações, desde o período sensório-motor, são tanto a assimilação do objeto ao sujeito quanto a acomodação do sujeito ao objeto. Assim, o número não pode ser explicado por experiências mentais interpretadas empiricamente. Resumindo, o número não é explicado pela simples concepção de experiências mentais em geral.

Hermann Von Helmholtz (1821-1894) era físico e fisiólogo e mesmo não sendo psicólogo por formação é considerado, graças aos seus trabalhos, um dos criadores da psicologia das percepções. Embora a psicologia ocupasse o terceiro lugar entre seus interesses científicos suas pesquisas muito contribuíram para o fortalecimento da abordagem experimental no estudo de questões psicológicas.

Trabalhou em Königsberg e talvez tenha sido esta uma das razões para a influência kantiana na sua concepção de número.

Para Helmholtz o número seria construído primeiramente em seu aspecto ordinal (em oposição a Mach e Rignano, que defendiam a primazia do cardinal) e assim como em Kant, em íntima associação com o tempo. O número teria então o seu ponto de partida na lembrança da ordem de sucessão temporal de nossos estados de consciência. Para Helmholtz "contar é um procedimento que repousa em nossa faculdade de recordar a ordem de sucessão de nossos estados de consciência". (HELMHOLTZ, *apud*, PIAGET, 1975, p.76)

Desta forma a sucessão temporal irreversível dos estados de consciência constituiria por si só uma série interna e bastaria então denominar numericamente os termos desta série para se obter uma sucessão de números ordinais que permitiriam definir o cardinal como uma "soma" de ordinais. São três, portanto, os aspectos envolvidos nesta concepção: a origem ordinal; o processo de numeração dos termos da série temporal e a fonte empírica.

Quanto ao primeiro aspecto, diversas demonstrações (entre elas as de Brunschvicg e de Reymond) já foram realizadas mostrando que a ordenação supõe a cardinação e outras tantas (embora em menor número), provando a recíproca, seguindo o seguinte princípio:

> [...] se as unidades sucessivas são rigorosamente homogêneas, somente pode se distinguir sua ordem de sucessão quando se relacionam com os conjuntos formados por esta própria sucessão (1+1+1 difere de, por exemplo, 1+1, apenas porque existem dois números enumerados antes do último ao invés de um único); inversamente, os conjuntos cardinais não podem ser avaliados a menos que sejam ordenados, se é que se quer ter certeza de não haver contado duas vezes o mesmo termo. (PIAGET, 1975, p.76)

Quanto à questão do método de numeração, Helmholtz tinha necessidade de estabelecer uma continuidade entre a sucessão (qualitativa) dos estados de consciência e a sucessão dos números inteiros para transformar tais "estados qualitativos" em "unidades" homogêneas. Ele preencheu, então, a lacuna existente com um conjunto de operações convencionais vinculando signos de numeração com os termos de uma série temporal, através de uma reconstituição psicológica artificial, culminando com a "transformação" dos elementos da sucessão no tempo em unidades homogêneas.

Finalmente, a fonte empírica, o ponto de partida que para Helmholtz está localizado em uma experiência interior, no caso, o tempo.

As experiências de Piaget acerca do tempo comprovaram que a construção da sucessão temporal só ocorre na criança durante o período operatório concreto, portanto, concomitante ou após a construção do número. Piaget (1975) comenta que a "ilusão de um parentesco direto entre número e tempo foi compartilhada por certa quantidade de outros pensadores começando por Kant e terminando por Brouwer", o que torna o erro muito mais significativo (PIAGET, 1975, p.77).

A explicação de Helmholtz, embora também oriunda de uma interpretação psicológica do número, diferentemente das teorias de Mach e Rignano, admite, que o número seria extraído a partir de uma experiência interior, o que poderia possibilitar uma confusão entre a teoria dos estados sucessivos de consciência e a análise genética.

Essa confusão, todavia, não ocorre. A principal diferença entre "explicar" o número mediante a análise genética e pela experiência interior reside na forma da abstração. As explicações pela experiência interna acreditam que é possível abstrair um caráter de uma percepção interna e inseri-lo numa conduta superior da mesma maneira como se extrai uma qualidade física qualquer, enquanto que na análise genética a abstração de um caráter supõe uma abstração a partir das ações.

Um outro fato em que a análise genética e a experiência interior discordam se refere à operação de seriação (ou ordinação) que, segundo a psicogenética, não pode ser extraída nem da experiência externa e nem da interna, porque a ordem é algo que é acrescentado (e não extraído) aos objetos sejam estes reais ou da consciência atual.

2.3.3.2 O NÚMERO NO LOGICISMO DE RUSSELL E WHITEHEAD

Partidários da idéia de Frege, Russell e Whitehead tinham o ambicioso plano de "reduzir" a matemática à lógica e, iniciaram o trabalho tentando apresentar a aritmética como um ramo da lógica pura. Para isso, o "plano" era "traduzir" os axiomas de Peano em termos puramente lógicos. Assim, definem número em termos de classes e de relações ou, mais especificamente, o aspecto cardinal do número é estabelecido pelas classes e o ordinal, pelas relações assimétricas, porém, de forma independente.

Um outro fator importante a ser observado e que decorre dessa concepção é que os números se constituiriam isoladamente, a partir de classes independentes entre si e, portanto, não existiria uma iteração culminando com a sucessão dos números inteiros. Com esta concepção não é absurda a idéia de uma construção em separado dos aspectos cardinal e ordinal.

Não será utilizado aqui o argumento da interdependência entre a cardinação e a ordenação para ressaltar a insuficiência da concepção russelliana porque o que nos interessa é analisar a possibilidade de redução do número à lógica.

Para verificar se esta explicação é satisfatória a questão se resume em "determinar se os processos formadores do número são ou não os mesmos a partir dos quais derivam as classes e as relações" (PIAGET, 1975, p.91).

A teoria de Russell e Whitehead para o número começa com a descrição do que é uma "classe de classes": Duas classes consideradas em sua extensão dão origem a uma mesma classe de classes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus elementos.

O número cardinal é definido como estas "classes de classes" e assim, o número 1 é a classe de todas as classes unitárias, o número 2 é a classe de todos os pares possíveis, o número 3 é a classe de todas as ternas, etc.

O número ordinal é igualmente constituído por meio de classes, só que de relações assimétricas "semelhantes" e esta "semelhança" é obtida também mediante uma correspondência biunívoca.

Apesar destas "definições" terem sido aprovadas por muitos matemáticos e quase todos os lógicos, também recebeu muitas objeções que podem, todavia, serem agrupadas em duas vertentes: a) as que defendem a existência de um círculo vicioso e b) as que preconizam a existência de diferenças funcionais entre a classe lógica e o número.

O maior crítico ao reducionismo lógico foi o francês Henri Poincaré. Para ele existiria um círculo vicioso na definição russeliana porque o número já estaria presente ao se estabelecer a correspondência biunívoca entre os objetos singulares.

O argumento de Poincaré era o de que na “expressão ‘um’ homem, etc., o objeto individual ou a classe singular já implicava a presença do número 1” (PIAGET, 1975, p.92).

A contra-argumentação dos logicistas era a de que existe uma distinção entre o “um” lógico e o número 1. O “um” lógico implicaria a “identidade” e não o número, da mesma forma como os termos lógicos “alguns”, “todos” ou “nenhum” se referem apenas à pertinência ou não dos indivíduos a uma determinada classe e não a uma quantidade determinada de indivíduos.

Na opinião de Piaget tanto Russell quanto seus adversários, ao argumentarem com identidades e classes isoladas, desencadearam um embate sem saída, pois o atomismo lógico possibilita a justificativa nas duas direções, uma vez que “a identidade pertence tanto à matemática como à lógica intensiva”. Assim, a especificidade lógica ou matemática só é passível de ser determinada em função da “estrutura de conjunto da totalidade operatória onde se inserem os elementos” (PIAGET, 1975, p.92).

Para estabelecer a diferença funcional entre classe e número, Piaget deixa claro que a função da classe, por ser constituída de indivíduos que gozam de uma determinada propriedade, é a de identificar. A função do número (que necessita abstrair as qualidades), é a de diversificar, de onde se conclui que são funções fundamentalmente heterogêneas. Entretanto, novamente, esse argumento só será válido se aplicado às totalidades operatórias e não aos elementos isolados.

Assim, considerando o atomismo lógico russelliano, Piaget entendia que a análise da solução logicista deveria se restringir à natureza da correspondência biunívoca estabelecida para se criar as classes equivalentes com o intuito de verificar se esta correspondência é puramente lógica (qualitativa), ou se já introduz explicitamente o número (quantitativa).

Na correspondência biunívoca lógica ou qualitativa os elementos se correspondem univocamente em função de suas qualidades como, por exemplo, quando se analisam as semelhanças entre dois objetos (ou conjuntos de objetos) e, para isto, se estabelece a correspondência entre uma parte de um com a parte semelhante no outro. Por considerarem apenas as qualidades, as correspondências qualitativas independem da quantificação. Um bom exemplo de correspondência qualitativa é quando se corresponde os pelos dos animais e as penas das aves.

A correspondência biunívoca qualquer ou matemática não é estabelecida em função das semelhanças qualitativas, mas associando um elemento qualquer de um dos conjuntos a um elemento também qualquer do outro, com a única condição de que cada elemento seja colocado em correspondência uma única vez, o que pressupõe a unidade e implica, portanto, numa quantificação. Assim, o problema da concepção de Russell, segundo Piaget, reside no fato dele utilizar a correspondência biunívoca matemática ao estabelecer sua “classe de classes” e, assim, não é puramente a classe que gera o número cardinal, mas uma classe já quantificada pela correspondência qualquer.

> Assim, quando Russell constrói o número 12 e faz corresponder um a um os apóstolos de Jesus Cristo com os marechais de Napoleão, o apóstolo Pedro não é associado ao marechal Ney em virtude de suas qualidades comuns (como quando um biólogo põe em correspondência os pelos dos mamíferos com as penas dos pássaros) mas, simplesmente enquanto um constitui uma unidade qualquer do primeiro conjunto e o outro uma unidade qualquer do segundo. (PIAGET, 1975, p.94)

Quanto ao número ordinal concebido como classe de relações assimétricas semelhantes, a primeira questão que se apresenta é saber qual é a “semelhança” que intervém na constituição de duas (ou mais) classes de relações assimétricas semelhantes.

Analogamente ao número cardinal é o tipo de correspondência biunívoca que é o determinante. Se a correspondência fosse do tipo qualitativo, as relações assimétricas que vinculam os objetos seriados deveriam ser as mesmas nas duas séries correspondentes de modo que os objetos seriados não seriam distintos apenas por seu número de ordem e as categorias entrariam em jogo. Se a correspondência é de natureza qualquer, a semelhança é generalizada e há a abstração do conteúdo qualitativo das relações de forma que o único critério possível para distinguir dois elementos é o número de ordem dos objetos e das relações que os unem sucessivamente.

> Russell, ao não estabelecer na sua dupla redução estas distinções genéticas que conduzem a uma distinção correlativa na lógica entre as operações como tais e, não somente entre as classes e as relações isoladas se encerra, assim, em dois círculos viciosos. (PIAGET, 1975, p.95)

2.3.3.3 POINCARÉ E A INTUIÇÃO RACIONAL DO NÚMERO

O matemático francês Henri Poincaré ao não concordar com a tese de que é possível reduzir o número à lógica das classes e das relações foi um dos maiores críticos ao reducionismo de Russell e Whitehead.

Poincaré entendia o número como o produto de uma intuição racional (sintética *a priori*) e irredutível às operações lógicas. Contrário à tese de que a matemática seria simplesmente um ramo da lógica, o cientista francês é considerado um dos precursores do intuicionismo, corrente que se opunha à tese logicista.

> A própria possibilidade da ciência matemática parece uma contradição insolúvel.
>
> Se esta ciência é apenas aparentemente dedutiva, de onde vem o rigor perfeito que não se tem intenção de colocar em dúvida?
>
> Se, por outro lado, todas as proposições que ela enuncia podem ser tiradas umas das outras pelas regras da lógica formal, como a matemática não se reduz a uma imensa tautologia? (POINCARÉ, 1943, p.9).

Poincaré também criticava os matemáticos que se deixavam guiar simplesmente pela intuição, os quais, "na primeira investida fazem conquistas rápidas, mas algumas vezes precárias como se fossem ousados cavaleiros na linha de frente" (POINCARE, 1943, p.13).

> De acordo com Poincaré, se no século XIX os matemáticos dividiam-se, em duas correntes, uma que se apoiava na lógica e outra na intuição, uma releitura dos clássicos enquadraria todos como intuicionistas. E mais, como a intuição não oferece o rigor e nem mesmo a certeza, foi necessária uma evolução na ciência matemática, evolução esta que a encaminhou para a lógica. Todavia, 'para fazer

> aritmética, assim como para fazer geometria é preciso algo mais que a lógica pura', sendo a intuição este 'algo mais', ressaltando, contudo, que sob esta denominação diversas idéias estão subentendidas. (POINCARE, 1943, p.18)

Comparemos estes quatro axiomas:

1 Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si;

2 Se um teorema é verdadeiro para o número 1, e se demonstramos que ele é verdadeiro para n +1 contanto que o seja para n, será verdadeiro para todos os números inteiros;

3 Se, numa reta, o ponto C está entre A e B, e o ponto D entre A e C, o ponto D estará entre A e B;

4 Por um ponto, só podemos fazer passar uma paralela a uma reta dada.

> Os quatro devem ser atribuídos à intuição. Contudo, o primeiro é o enunciado de uma das regras da lógica formal, o segundo é um verdadeiro juízo sintético *a priori*, é o fundamento da indução matemática rigorosa, o terceiro é um apelo à imaginação; o quarto é uma definição disfarçada. (POINCARÉ, 1995, p.18)

A intuição se apresenta sob diversas formas, como um apelo aos sentidos e à imaginação; como generalização, por indução, de procedimentos das ciências experimentais (representar um polígono de n lados, por exemplo) e, a que nos interessa particularmente, a intuição do número puro (2º axioma) e da qual se originaria, para Poincaré, o verdadeiro raciocínio matemático, a única intuição que é passível de certeza.

É importante ressaltar que no século XIX ocorreu a aritmetização da análise como forma de fundar esta última, em bases mais sólidas, o que torna bastante plausível a hipótese de Poincaré.

A concepção de que o número (e, conseqüentemente, a matemática) é produto de uma intuição racional foi (e ainda é) sustentada por inúmeros matemáticos existindo, porém, divergências quanto ao sentido de intuição que varia desde "a intuição da essência estática do número até a intuição operatória" (PIAGET, 1975, p.95).

Ao considerar que o número inteiro se funda sobre uma intuição sintética *a priori* que se traduz no raciocínio por indução ou recorrência, Poincaré, por mais convencionalista que tenha sido em muitas questões, como por exemplo, sobre os vários tipos de números ou sobre os relacionamentos entre os diversos tipos de espaço, admite que tal intuição é operatória, ou seja, uma intuição isenta de contradição e que é "construída".

Brouwer, que renovou o intuicionismo de Poincaré e o opôs ao formalismo lógico, considerava que "o domínio da intuição racional se estenderia assim, do *a priori* à livre construção operatória" (PIAGET, 1975, p.95).

Piaget considerava que a intuição operatória do número puro, irredutível à lógica, concebida por Poincaré carecia de especificidade, enquanto que o reducionismo lógico de Russell não seria operatório o suficiente. Embora as duas concepções de número possuíssem aspectos de verdade, elas eram incompletas. Assim, a hipótese do mestre genebrino foi a de que haveria a possibilidade de um *tertium* entre as duas posições.

A discordância de Piaget neste caso se fundamenta no fato de que a intuição do número puro não é a de um número específico e sim de um número qualquer e seria, segundo o próprio Poincaré, a "faculdade de conceber que uma unidade pode agregar-se a um conjunto de unidades" (POINCARE, 1943, p. 37).

Ao procederem de uma intuição que contém, de antemão, a noção de unidade, as operações numéricas se colocam em oposição às operações lógicas. Entretanto, os resultados de inúmeras pesquisas realizadas por Piaget e outros sobre a gênese dos conceitos matemáticos mostram que:

> Todos os conceitos de caráter extensivo e métrico como a medida, a proporção em geometria e o próprio número somente se constituem em sua forma operatória quando podem apoiar-se em agrupamentos lógicos de caráter intensivo. (PIAGET, 1975, p.96)

Isto não significa, todavia, que exista um estádio caracterizado por estruturas lógicas que poderia ser considerado pré-numérico seguido de um estádio numérico, ao contrário, existe uma interdependência (que será mais bem explicitada no próximo capítulo) entre o lógico e o numérico. Esta interdependência é originária do conceito de conservação dos conjuntos como totalidades lógicas ou numéricas e, além disso, esta conservação não se apresenta absolutamente como uma "intuição", mas é construída, operatoriamente, num longo e complexo processo.

> A faculdade de conceber que uma unidade pode agregar-se a um conjunto de unidades que é assinalado por Poincaré como sendo o específico da intuição do número puro supõe, então, a 'faculdade' de conceber conjuntos invariantes encaixados uns nos outros e a 'faculdade' de ordenar desde o início os elementos agregados. (PIAGET, 1975, p.97)

Todavia, se a sucessão dos números não pode se apoiar em uma primeira intuição contendo de antemão a idéia de unidade, após sua construção, esta mesma sucessão produz uma intuição racional em tudo semelhante à descrita por Poincaré, com a única diferença de ser final e não prévia, "no sentido de que o número é apreendido diretamente pelo espírito sem ser intermediado por raciocínios discursivos ou lógicos" (PIAGET, 1975, p.98).

> [...] concentração instantânea de inumeráveis raciocínios anteriores e (esquecidos), esta intuição final é apenas a expressão da compreensão inteligente e não nos informa nada quanto à sua construção. (PIAGET, 1975, p.98).

Ao conceber o número como "síntese da inclusão das classes e da ordem serial, uma combinação nova, mas a partir de caracteres puramente lógicos", Piaget resume o que tanto a hipótese de Russell e Whitehead, por um lado, quanto a de Poincaré, por outro, querem explicitar.Está estabelecido, portanto, mais um *tertium*, tão ao gosto do cientista genebrino.

Em outras palavras, o número tem por fonte a lógica, porém não deriva de nenhuma operação em particular, mas de sua síntese, com as classes agrupando os objetos por suas semelhanças, as relações assimétricas pelas diferenças ordenadas e o número agrupando os objetos enquanto estes são, ao mesmo tempo, equivalentes e distintos, o que é conciliatório com a irredutibilidade de Poincaré.

2.3.4 O ESTRUTURALISMO DE NICOLAS BOURBAKI

Além do acabamento da lógica matemática e da análise dos fundamentos o século XX testemunhou também o aparecimento de estruturas gerais, as estruturas-mãe dos Bourbaki, que possibilitaram a unificação das matemáticas (geometria, álgebra e análise). A partir dessas estruturas, surgiu, entre outras unificações, uma "geometria associada à análise no que se denominou topologia". As mesmas estruturas possibilitaram a introdução “de uma análise para espaços de dimensão infinita, que é a análise funcional” e, forneceram, também, “um formalismo algébrico à geometria, por meio da geometria algébrica”. (D’AMBROSIO, 1998, p.54)

Nicolas Bourbaki é um personagem fictício de nome grego e origem francesa sob o qual se abrigava um grupo de jovens matemáticos franceses e, além de artigos publicados nas mais eméritas revistas científicas, produziu, a mais importante obra matemática do século XX, intitulada *Elementos de Matemática*, com mais de cem volumes e ainda incompleta, foi concebida com o intuito de ser o “equivalente do século XX do trabalho de Euclides, sintetizando toda a matemática conhecida” (D’AMBROSIO, 1998, p.54).

> Segundo a concepção bourbakiana, ou pelo menos a de Jean Dieudonné, a matemática atual é como uma bola formada de muitos fios emaranhados de maneira tal que aqueles que estão no centro reagem entre si firme e imprevisivelmente. Nesse emaranhado há fios, ou pontas de fios, que saem em várias direções e que não têm nenhuma conexão íntima com nada que está dentro. O método bourbakiano corta todos esses fios livres e se concentra no apertado núcleo da bola de onde tudo o mais se desembaraça. (EVES, 1995, p.692)

O estruturalismo bourbakiano não alcançou um *status* de corrente filosófica e, mesmo antes de se consolidar, passou por transformações em função da descoberta ou construção do que pode ser considerado como novas estruturas, quais sejam, as “categorias”, de Mac Lane, Eilenberg, etc.

2.4 O FUTURO

Em virtude da riquíssima evolução das idéias matemáticas que desde os primórdios da humanidade até os dias atuais, apenas acumula novos resultados, é legítimo indagar se existiria um limite para tal crescimento ou, em outras palavras, qual é o futuro destinado à matemática.

A matemática atual passa por momentos de profundas transformações em função de diversos fatores, um deles, é o reconhecimento de que a matemática é afetada pela diversidade cultural, tanto nos níveis elementares, quanto nos mais avançados. Um outro fator é o avanço tecnológico que alterou os meios de observação, de coleta e processamento de dados, alterações estas que modificaram a natureza do rigor científico.

Na matemática do futuro ocupará lugar de destaque o que hoje é denominado de matemática discreta e, igualmente, o que antes, eram considerados como situações particulares, ou "casos patológicos", como a não-linearidade; a teoria do caos, fractais, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica, enfim, conteúdos que, apesar de sua simplicidade e acessibilidade, só são estudados em algumas "especialidades" de matemática aplicada (D'AMBROSIO, 1998).

Tais assuntos apresentam problemas mais interessantes, a visualização é semelhante ao que se vê na TV e nos computadores e, com certeza, agradariam mais aos jovens se fossem incorporados aos currículos escolares.

> Já é tempo de os cursos de licenciatura perceberem que é possível organizar um currículo baseado em coisas modernas. Não é de estranhar que o rendimento esteja cada vez mais baixo, em todos os níveis. Os alunos não podem agüentar coisas obsoletas e inúteis, além de desinteressantes para muitos. Não se pode fazer todo aluno vibrar com a beleza da demonstração do teorema de Pitágoras e outros fatos matemáticos importantes. (D'AMBRÓSIO, 1998, p.59)

Todavia, pela própria história da matemática, é possível afirmar que sua construção não tem limites, porém, de onde viria esta inesgotável fonte de novos conhecimentos? Esta questão é respondida pela epistemologia da matemática, da qual, são abordados alguns destaques a seguir.

2.4.1 A EPISTEMOLOGIA DA MATEMÁTICA

A existência, o desenvolvimento e a fecundidade da matemática levantam questões epistemológicas que são essenciais não só sob a ótica da epistemologia da matemática, como também, da epistemologia em geral.

De fato, desde o nascimento da teoria do conhecimento, a partir das reflexões de Platão sobre a matemática, a epistemologia seguiu, com Descartes, Leibniz, Kant e mesmo nos dias atuais, discutindo o que Piaget considera como questão central de toda epistemologia: *Como é possível a matemática e de onde vem o seu* *acordo com o real*? Pela variedade de soluções propostas (muitas incompatíveis entre si), ainda hoje esta questão não se encontra satisfatoriamente resolvida.

Os principais trabalhos de Piaget acerca da epistemologia da matemática se concentram em quatro importantes obras: *Lógica e conhecimento científico*; *Epistemologia matemática e psicologia*; *Epistemologia Genética* e *Introdução à Epistemologia genética – 1: O pensamento matemático*.

Na primeira delas, Piaget partiu da discussão acerca do estatuto epistemológico das proposições matemáticas e concluiu que só mediante a combinação entre as análises lógicas e genéticas seria possível atingir as raízes epistemológicas do conhecimento matemático. Piaget demonstrou esta afirmação mediante a descrição dos processos de construção, pela criança, do número e do espaço. Em *Epistemologia Matemática e Psicologia*, em co-autoria com E. Beth, como o próprio título indica, a preocupação central é a relação entre matemática e psicologia e concluem que, embora enquanto saber científico exista uma total independência entre ambas, o mesmo não é possível de se afirmar quando o enfoque se torna epistemológico. Em *Epistemologia Genética*, obra considerada de "divulgação", Piaget discute os três principais problemas da epistemologia da matemática, quais sejam: a fecundidade, seu caráter rigoroso e necessário e a sua perfeita harmonia com a experiência e realidade física.

Finalmente, na última obra citada anteriormente, a preocupação central é com o "pensamento matemático", enfatizando, de maneira particular, o que o autor considera como o problema central de toda epistemologia, qual seja, "a possibilidade de uma ciência matemática ao mesmo tempo rigorosamente dedutiva e que se adapte à experiência" (PIAGET, 1975, p.63).

2.4.1.1 OS DADOS GENÉTICOS

Para discutir a respeito do estatuto epistemológico das proposições matemáticas, Piaget parte da comparação entre as seguintes afirmações: "os seres vivos nascem a partir de seres vivos, crescem e morrem enquanto indivíduos" e "3 x 4 = 12" . Embora ambas sejam proposições verdadeiras, existe uma "dupla oposição entre elas", no que se refere ao significado e à natureza epistemológica.

Quanto ao significado ou alcance do conhecimento a proposição matemática é imediatamente inteligível, transparente à razão e compreensível para qualquer indivíduo familiarizado com os termos em questão. Já a proposição biológica recai sobre conceitos que possuem, individualmente, problemas ainda não resolvidos como, por exemplo, o conceito indicado pelo termo *vivo*, já que "se conhecem vírus que assimilam mas não respiram ou que podemos cristalizar à nossa vontade" e que ao voltar ao estado normal, funcionam como antes. (PIAGET et al, 1980, p.337)

Já no que se refere à natureza epistemológica a situação se inverte, pois a proposição biológica é, sem nenhuma controvérsia, conseqüência da experimentação e, portanto, passível de revisão e modificação em decorrência de novos experimentos.

Para a proposição matemática, por outro lado, são inúmeras as interpretações acerca do seu modo de formação, do empirismo ao idealismo; do platonismo ao empirismo lógico; do intuicionismo ao estruturalismo, razão pela qual, a questão "o que é número?", reveste-se de tanto significado.

Esta dupla situação, de clareza quanto ao significado e obscuridade no que se refere à natureza remeteria o problema para uma análise numa perspectiva genética, pois,

> [...] se quiser estabelecer ou verificar uma verdade empírica, o sujeito, ao entregar-se a toda espécie de obstáculos ou de dificuldades exteriores, está em geral consciente dos processos de sua atividade, sendo portanto, o estatuto epistemológico das proposições obtidas tanto mais claro quanto o seu conteúdo é mais difícil de determinar com precisão; ao passo que a formação de conhecimentos ligados a atividades mais espontâneas, mais primitivas e mais profundas será muito mais difícil de estabelecer, e isso, paradoxalmente, tanto mais quanto o resultado dessas atividades é mais evidente e não fornece portanto nenhumas ocasiões ao sujeito de atingir retroativamente o detalhe dos processos que aí conduziram. (PIAGET, et al, 1980, p.338)

Assim, só existiria uma maneira de se compreender o estatuto epistemológico do conhecimento matemático: coordenar o geral da natureza lógica e o elementar psicogenético, como uma maneira de atingir ao mesmo tempo, as pressuposições mais gerais e os modos de formação mais elementares.

Piaget concebia a lógica como a axiomatização das estruturas operatórias do sujeito e a matemática um "sistema de construções que se apóiam igualmente nos seus pontos de partida nas coordenações das ações e das operações do sujeito e procedendo igualmente por uma sucessão de abstrações reflexionantes em níveis mais elevados". (PIAGET, et al, 1980, p.338)

Dessa forma, para compreender o estatuto epistemológico do conhecimento matemático do ponto de vista genético, é fundamental buscar, nos seus primórdios, as conexões entre as estruturas matemáticas nascentes e as estruturas operatórias do sujeito.

Tal interpretação da matemática contraria a opinião da grande maioria dos cientistas e historiadores das ciências para os quais não existe nenhuma relação entre a formação das noções e operações em seus estágios mais elementares e a sua evolução nos níveis superiores. Esse reduzido interesse que, em geral, é dedicado aos estágios elementares é decorrente da "concepção comum de um desenvolvimento dos conhecimentos que seria linear, substituindo-se cada etapa à etapa precedente" o que levaria então, a um contato de cada última etapa, apenas com a imediatamente anterior e nunca com as primeiras. (PIAGET; GARCIA, 1987, p.17)

Como os sucessivos estádios de construção do saber são seqüenciais, "cada um é, ao mesmo tempo, o resultado das possibilidades abertas pelo precedente e condição necessária do subseqüente". Além disso, como o mecanismo essencial a esta construção é a abstração reflexionante cada estádio começa pela reorganização, em outro patamar, das principais novidades dos níveis precedentes, o que estabelece a "integração nos estádios superiores de determinadas ligações, cuja natureza só é explicada na análise dos estádios elementares". (PIAGET; GARCIA, 1987, p.17)

Assim, a matemática se constitui num notável exemplo de construção do saber mediante a abstração reflexionante. De fato, historicamente falando, são três os grandes períodos de evolução da matemática, a matemática grega, o período entre os séculos XV e XIX e a partir do século XIX até os dias atuais, e:

> [...]o realismo grego, que apenas se ocupa dos estados permanentes (figuras e números), forneceu-nos, entretanto,

> um conjunto de conhecimentos prévios necessários à descoberta das transformações algébricas e infinitesimais do século XVII, e a análise destas últimas era indispensável para que pudessem constituir-se as estruturas específicas das matemáticas do século XIX e de hoje. (PIAGET; GARCIA, 1987, p.18)

2.4.1.2 AS CONEXÕES ENTRE AS ESTRUTURAS MATEMÁTICAS E AS OPERAÇÕES DO SUJEITO

Para se estabelecer as conexões entre as estruturas operatórias do sujeito e as estruturas matemáticas, os estudos realizados por Piaget e seus colaboradores não recorreram a declarações verbais nem à análise da “tomada de consciência” de determinada operação, mas, primordialmente ao que o sujeito *faz* para adquirir e utilizar um conhecimento e não ao que ele *pensa* a respeito.

Já no período operatório concreto a criança é capaz de agrupamentos aditivos e multiplicativos de classes e de relações, os últimos, na forma de matrizes ou tabelas de dupla entrada. Diretamente desses agrupamentos deriva uma operação essencial em matemática, o produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, representado por AXB. No estádio das operações formais, as operações sobre operações, permitem a determinação do conjunto das partes de um conjunto, operação também essencial para a matemática atual.

> Quanto ao conjunto das partes, que supõe uma combinatória, ele aparece um pouco tarde (início do estádio das operações proposicionais por volta dos onze ou doze anos), mas muito espontaneamente também, pois que sem nenhuma formação escolar nesse ponto os sujeitos conseguem combinar os juízos ou os objetos segundo uma estrutura a partir desse nível: à análise genética, este conjunto das partes aparece, com efeito, como uma generalização da classificação no sentido, para um conjunto dado de elementos, de uma classificação de todas as classificações compatíveis com esses elementos. (PIAGET et. al; 1980, p.345)

A partir dos trabalhos da escola Bourbaki intensificou-se a busca por uma “matemática única”, que pudesse ser expressa mediante estruturas universais. Como conseqüência há um grande esforço no sentido da constituição de uma *teoria geral das* *estruturas*, de forma a considerá-las independentemente da natureza dos seus conteúdos.

As recentes investigações que culminaram com a demonstração do "último teorema de Fermat" corroboram as hipóteses bourbakistas, uma vez que, setores aparentemente desconexos da matemática, resultam isomorfos. É também, mediante o estabelecimento de diversos isomorfismos, que a teoria geral das estruturas elimina a comparti mentalização dos diferentes setores da matemática, dotando-lhe de uma "arquitetura geral" cujos alicerces repousam sobre três estruturas fundamentais, irredutíveis entre si.

A partir dessas estruturas fundamentais, que alguns autores denominam de "estruturas mãe", procedem todas as estruturas particulares, construídas mediante dois processos, quais sejam, a *diferenciação* (introdução de novas condições sob forma de axiomas, restringindo os campos de aplicação) e a *combinação* entre estruturas diversas. Assim, para a investigação epistemológica, a pergunta a ser feita é: quais são as relações entre as estruturas fundamentais que constituem os alicerces do edifício formal da matemática e as estruturas naturais do sujeito?

Em primeiro lugar é preciso ficar claro que embora bastante arraigada ao formalismo, a construção bourbakista está longe de ser apenas uma axiomática, com suas premissas escolhidas livremente objetivando unicamente fundamentar os desenvolvimentos posteriores; ao contrário, a definição das "estruturas-mãe" foi determinada mediante um longo processo de análise regressiva. Apenas para relembrar, as "estruturas-mãe" são as algébricas (cujo protótipo é o *grupo*); as de ordem (*redes*, referentes às relações) e as topológicas (referentes às noções de vizinhança, limite e continuidade).

Por serem extremamente gerais e abstratas, Piaget considera impossível encontrá-las sob esta mesma forma nas coordenações operatórias naturais do sujeito e, menos ainda, na sua consciência.

> [...] encontrá-las já elaboradas constituiria uma verificação quase milagrosa da teoria platônica da reminiscência ou da teoria kantiana dos esquemas *a priori*, que nenhum dado genético confirmou até agora. (PIAGET, et al 1980, p.346)

Do ponto de vista genético, as "estruturas-mãe" são aquelas primitivamente organizadas e que servem de ponto de partida para a seqüência de abstrações reflexionantes que possibilitam a construção do conhecimento. Assim, analogamente ao trabalho dos Bourbaki, para a determinação das estruturas mais elementares do sujeito é preciso uma análise genética regressiva, tal como a análise formal dos isomorfismos levou às estruturas fundamentais da matemática.

> A questão é então a de estabelecer se existem relações entre o mais fundamental, formalmente falando, e o mais elementar, geneticamente falando. Se estas relações existirem, dever-se-á, portanto, encontrar três espécies de estruturas elementares, irredutíveis entre si e que aparecerão como casos particulares ou 'representações' das estruturas algébricas, de ordem e topológicas. (PIAGET et al, 1980, p.346)

Para isso aparentemente seria necessário remontar aos esquemas sensório-motores e verificar se já apresentam algumas das características algébricas, de ordem e topológicas, irredutíveis entre si. Piaget, entretanto, afirma ser suficiente a análise das primeiras estruturas operatórias que dão origem às construções seguintes. Tais estruturas são espontâneas e não resultam de aquisições escolares; são acabamentos de aquisições de níveis anteriores e constituem o ponto de partida para novas aquisições. As estruturas elementares do sujeito, a exemplo das estruturas-mãe, são também irredutíveis e de três tipos diferentes:

- Estruturas que recaem sobre objetos manipulados mediante operações lógico-matemáticas, cuja forma de reversibilidade é a *inversão,* isto é, a composição entre as operações direta e sua inversa resulta no elemento neutro (anulação de toda transformação), sendo referentes, portanto, às classes e não às relações.
- Estruturas que recaem sobre relações manipuladas por operações lógico-matemáticas que têm a reciprocidade como forma de reversibilidade, no sentido de que o resultado da composição entre a relação direta (xRy) e sua recíproca (yRx) é a relação de equivalência $x \equiv y$ e não uma anulação.
- Estruturas que não recaem nem sobre classes (manipulação das semelhanças) e nem sobre séries (relação de diferença crescente), mas, nas vizinhanças, como por exemplo, os

> agrupamentos de partição (de onde tem origem a medida), cujos elementos são agrupados não mais de acordo com suas semelhanças ou diferenças (que dão origem ao número), mas em função de sua posição. São os sistemas das operações infralógicas ou espaciais cuja origem remonta a intuições topológicas elementares como fechamento, fronteira, continuidade, etc.

Pela sua própria constituição e pela diferença entre os elementos sobre os quais recaem, estas três estruturas são irredutíveis entre si fornecendo, entretanto, inúmeras possibilidades de combinações, como no caso entre (1) e (2), cuja síntese fornece a *seqüência dos números naturais* e entre (2) e (3), dando origem à *medida espacial.*

Fica evidente a "semelhança" entre as estruturas do tipo (1) e as algébricas; entre as do tipo (2) e as de ordem e entre as do tipo (3) e as topológicas. Este fato evidencia uma "analogia nítida entre o fundamental matemático, sob a forma das três estruturas-mãe, e o elementar genético sob a forma de três espécies de estruturas operatórias" encontradas não no que o sujeito pensa, mas nas suas coordenações espontâneas de ações e de operações (o que ele *faz*). (PIAGET, 1975, p.63)

Existe, todavia, autonomia da matemática e da lógica em relação à psicologia e vice-versa, eliminando todo psicologismo (tendência de resolver qualquer problema lógico ou matemático utilizando resultados da psicologia). E isso, apesar da demonstração das conexões existentes entre as estruturas fundamentais da matemática e as estruturas operatórias elementares do sujeito e, do fato estabelecido anteriormente de que a lógica pode ser considerada uma axiomática das estruturas operatórias do sujeito.

A eliminação do psicologismo é vantajosa tanto para a psicologia quanto para a matemática (ou lógica), pois acaba com qualquer confusão de métodos e mesmo de problemas. Dessa forma surge um problema fundamental sob a ótica dos mecanismos reais do pensamento, que é o de como explicar psicologicamente a possibilidade de uma lógica e de uma matemática "puras" (independentes do conteúdo).

2.4.1.3 O PENSAMENTO MATEMÁTICO

A possibilidade de uma ciência matemática que seja ao mesmo tempo dedutiva e rigorosamente adaptável à realidade é extremamente perturbadora do ponto de vista genético. Isto porque, além desse acordo com a realidade física acontecer de modo muito detalhado, ele se realiza não somente no momento ou imediatamente após a descoberta de uma lei física, mas, "os esquemas matemáticos antecipam, com anos de antecedência, o conteúdo experimental que logo será inserido neles". (PIAGET, 1975, p.63)

Assim, ao mesmo tempo em que sempre será possível estabelecer a correspondência entre algum setor da realidade física e a matemática, a última supera constantemente a primeira, mediante suas generalizações. Um outro ponto importante é que, a partir de determinado grau de desenvolvimento, a matemática não se fundamenta, de nenhum modo, na própria experiência.

O mesmo acontece com a criança, ou seja, se no início ela tem necessidade da experiência para se assegurar que 1 + 4 = 2 + 3, posteriormente, a partir dos 11 ou 12 anos, basta a comprovação lógica. Da mesma forma os egípcios descobriram, usando a medição de terras, os fundamentos da geometria euclidiana e, posteriormente, com os gregos, o rigor da matemática exigia mais do que a simples comprovação experimental havendo necessidade da comprovação lógica. Piaget então indaga:

> Como explicar então esse poder misterioso de operações que parecem surgir de ações que se referem à experiência próxima, porém que, ao coordenar-se entre si, se afastam da realidade empírica num movimento cada vez mais acelerado até dominá-la, antecipá-la e, inclusive, desinteressar-se soberbamente das confirmações que elas lhes oferece nos terrenos limitados do atual e do finito? (PIAGET, 1975, p.64)

Realmente, no que se refere à matemática, quando esta é ainda elementar, ela se apresenta como conseqüência de algumas determinadas ações tais como, os deslocamentos, as reuniões ou dissociações, superposições e correspondências. Já no plano superior, o seu domínio é constituído por uma diversidade de transformações operatórias que extrapolam em todos os sentidos as fronteiras da experiência real ou realizável. Vem daí a sensação de aparente "pobreza" das operações nascentes frente a um universo real infinitamente superior e a posterior inversão de posições ocorrida com o desenvolvimento das operações dedutivas que superam as transformações realmente observáveis.

Com o desenvolvimento das operações matemáticas apareceram dois problemas fundamentais: o do *acordo permanente entre as operações dedutivas e o mundo real* e o da *fecundidade do raciocínio matemático*, que são abordados a seguir.

2.4.1.4 Principais problemas epistemológicos da matemática

Além das duas questões apresentadas anteriormente como oriundas do desenvolvimento das operações matemáticas uma terceira e importante indagação de natureza epistemológica também se apresenta, a que se refere à sua necessidade.

São, portanto, três os principais problemas epistemológicos da matemática: o de sua *fecundidade*, apesar de partir de poucos conceitos e axiomas relativamente pobres; o de se impor de maneira *necessária*, permanecendo rigorosa, apesar de seu caráter construtivo e, o de seu *acordo com a experiência* ou realidade física, apesar de sua natureza totalmente dedutiva.

De uma maneira geral, os dois primeiros problemas podem ser resumidos numa única questão, a de *como é possível a matemática*? E mais, se o desejo for de unificar os três problemas, a única questão a ser respondida, será a da *natureza dos "seres" matemáticos*, afinal, e isto é surpreendente, em se tratando de uma ciência exata e rigorosa, não existe consenso sobre o que são os "seres" matemáticos.

Optamos por abordar de maneira separada, cada um dos três principais problemas da epistemologia da matemática, sempre tendo como referencial a epistemologia genética de Piaget.

A) A questão da *fecundidade*: para analisar esta questão, Piaget considerou admitida a fecundidade da matemática, o que caracteriza um problema que é, ao mesmo tempo, genético e histórico-crítico, pela própria natureza das contínuas novidades que surgem em decorrência do trabalho dos matemáticos, pois estas não são nem invenções e nem descobertas.

Não são invenções porque lhes falta o grau de liberdade próprio das invenções, ao contrário, cada nova relação estabelecida ou nova estrutura determinada já traz consigo, uma necessidade, uma espécie de "só poderia ser desta forma".

Não são, também, descobertas, pois que não existem de antemão, como entendia Platão. Não sendo então, as novidades em matemática nem invenções e nem descobertas, elas só podem ser construções e, mais, construções necessárias, levantando, por conseguinte, a questão de seus mecanismos constitutivos.

A epistemologia genética se encarrega de mostrar, no que se refere aos mecanismos constitutivos, a convergência existente "entre o que dizem os matemáticos e o que revela a análise dos estágios elementares", levantando as possíveis hipóteses acerca das "raízes psicológicas e mesmo biológicas de tais construções" (PIAGET, 1990, p.78).

Para os matemáticos a fecundidade da matemática se deve, de maneira geral, à possibilidade de introduzir, indefinidamente, operações sobre operações, além de combinar estruturas. Concebida como uma "construção de estruturas" e pelo fato de tal construção ser indefinidamente aberta, a fecundidade da matemática estaria estabelecida.

Dessa forma, e sob esse aspecto, os "seres" matemáticos assumem um novo sentido, deixando de constituir uma espécie de objetos "ideais", com existência interior ou exterior ao sujeito (dependendo da corrente de pensamento) perdendo, portanto, o caráter ontológico. Em outras palavras, os objetos matemáticos mudam constantemente de função, à medida que mudam de nível, isto é, uma operação que recai sobre determinados "seres", converte-se, por sua vez, em objeto de teoria, num outro patamar (abstração reflexionante), e assim, sucessivamente, de forma que tudo pode tornar-se um "ser", dependendo do estágio em que está sendo analisado.

Embora possa parecer irreverência a comparação entre um matemático e uma criança, é quase impossível negar a semelhança existente entre essa "contínua construção intencional e refletida de operações sobre operações e as primeiras sínteses ou coordenações inconscientes que permitem a construção dos números ou das medidas", bem como das adições, multiplicações, proporções, entre outras operações (PIAGET, 1980 p.80).

B) A questão da *necessidade* e do *rigor*: no desenvolvimento da matemática, novas estruturas estão sendo progressivamente construídas e sem que exista nenhum grau de liberdade ou arbitrariedade em tais construções, ao contrário, possuem o caráter de necessidade.

Pode parecer paradoxal o fato de um conhecimento ser, ao mesmo tempo, indefinidamente fecundo e necessário. Como explicar o fato notável de que *"a fecundidade e a necessidade andam sempre juntas?"*. Para Piaget "ninguém pode negar que o espantoso progresso" da matemática contemporânea se encontra impregnado de dois "progressos correlativos entre uma construtividade reforçada e um rigor aumentado" e o segredo dessa necessidade estaria no interior da própria construção. (PIAGET, 1980, p.81)

Além disso, deve ser destacada a existência de dois níveis ou patamares distintos de necessidade: as demonstrações de caráter meramente lógico e as demonstrações que estabelecem o "por que" das conseqüências a demonstrar. De fato, as demonstrações simplesmente lógicas apenas mostram que as conclusões são decorrentes das premissas, pois estão de antemão contidas na reunião delas. As demonstrações que buscam os "por quês", utilizam "leis de composição" para atingir as conclusões, como por exemplo, os raciocínios por recorrência.

Dessa forma, se a fecundidade da matemática é garantida pela combinação de estruturas, a sua necessidade é estabelecida pelas leis de composição internas (a reversibilidade, por exemplo) ou externas, em virtude dos fechamentos que resultam da sua auto-regulagem.

C) Questão do *acordo com a realidade*: Piaget (1990) chama a atenção para o fato de que "na realidade tudo parece matematizável, senão sempre no sentido da medida, pelo menos no dos isomorfismos e das estruturações". É claro que tal sentença tem caráter de *postulado*, porém, mesmo em campos aparentemente resistentes, como o dos fenômenos vitais, esta afirmação tem se constituído em constante. O autor menciona ainda, a questão das "antecipações" já citadas anteriormente:

> E mais do que isso: insistiu-se com freqüência em antecipações surpreendentes, segundo as quais estruturas operatórias construídas dedutivamente, sem nenhuma

> preocupação com aplicações, puderam posteriormente servir de quadros de referência ou de instrumentos explicativos para fenômenos físicos descobertos muito tempo depois – a teoria da relatividade e a física nuclear fornecem muitos exemplos disso. (PIAGET, 1990, p.83-84)

Responder a essa questão mediante a epistemologia genética significa estabelecer o acordo entre as estruturas mentais do sujeito e as do objeto. Se o objetivo é buscar as origens é necessário remontar até às coordenações orgânicas e biofísicas, "a junção entre as operações do sujeito e as estruturas do objeto deverá ser procurada no próprio interior do organismo antes de poder ser confirmada pelos encontros entre a dedução e a experiência externa" (PIAGET, 1990, p.84).

Ainda segundo o autor, pelo simples fato do organismo ser parte integrante do mundo físico, parece ser compreensível que exista uma convergência entre as formas físicas e as formas intemporais construídas pelo sujeito. O que é menos compreensível é que a "continuidade das filiações não se perca pelo caminho", uma vez que, existe um longo caminho repleto de reconstruções e de abstrações reflexivas, com novas reorganizações, entre as estruturas orgânicas iniciais e as das operações formais (PIAGET, 1990, p.84).

Porém, e aqui se encontra outra semelhança entre o desenvolvimento do sujeito e o da matemática. Por ser uma ciência cumulativa, ao contrário das aprendizagens exógenas e das teorias empíricas, o próprio das estruturas lógico-matemáticas é jamais desprezar ou invalidar as precedentes, mas, sim, superá-las, integrando-as a título de subestruturas e mantendo as imperfeições iniciais dentro das fronteiras excessivamente estritas das formas de partida. A continuidade das formas gerais de coordenação é assegurada por um fenômeno análogo.

Da mesma forma, em seus primórdios, a matemática esteve estreitamente relacionada com a experiência e os primeiros procedimentos matemáticos muito têm de empíricos como, por exemplo, "reunir ou dissociar os elementos de um ábaco, verificar a comutatividade pela permutação das sub-coleções, etc." Existe aí, porém, uma diferença importante entre as experiências: na experimentação física, a informação é obtida diretamente das próprias características do objeto (conhecimento físico), enquanto que, a obtenção de informações lógico-matemáticas (conhecimento matemático) mesmo mediante experimentações, exige estabelecimento de relações e se fundamenta apenas nas propriedades oriundas da ação sobre os objetos.

Ora, essas ações uma vez interiorizadas podem ser realizadas dedutivamente, sem a presença dos objetos, a partir de formas elementares e prescindindo de conteúdos. “Sua harmonia com objetos quaisquer fica assegurada no sentido de que nenhuma experiência física poderia desmenti-las, pois elas estão vinculadas às propriedades das ações ou operações e não dos objetos”. (PIAGET, 1990, p.85)

O melhor exemplo desta construção de conceitos matemáticos reside na própria construção do tijolo fundamental do edifício matemático: a do número.

Capítulo 3
A investigação psicogenética e o número

Este capítulo é apresentado em nove grandes tópicos e tem como principal objetivo demonstrar a construção solidária das classes, séries e números. Um outro ponto que é destacado nesse capítulo é que os resultados de "novas" pesquisas que ressaltam o papel da contagem na construção do número, não ultrapassam os resultados piagetianos, ao contrário, apenas os complementam numa concepção mais dinâmica da teoria.

3.1 Iniciando a conversa: da mesma forma que nos capítulos anteriores, o objetivo desse tópico é introduzir os assuntos que são abordados na seqüência. Em particular, destaca as razões de Piaget para uma análise psicogenética do número.

3.2 A questão do formal e do fato no conhecimento matemático: resume os estádios do desenvolvimento cognitivo descritos pela psicogenética, tendo como fio a construção das estruturas lógico-matemáticas.

3.3 O que é o número: uma investigação genética: detalha as duas primeiras partes do livro *A gênese do número na criança*, abordando desde o processo de construção (conservação) das quantidades, até o surgimento do número enquanto síntese da classificação e da seriação. Em outras palavras, evidencia a dependência do número em relação às classes e às séries.

3.4 A coordenação entre a ordem e a cardinalidade: deixa explícito, entre outros pontos, a indissociabilidade dos aspectos cardinal e ordinal do número.

3.5 As relações entre classes e números: mostra a interdependência e solidariedade na construção das classes e dos números, evidenciando que o número desempenha papel importante na construção das classes.

3.6 As relações aritméticas e as composições aditiva e multiplicativa dos números: aqui são tratadas as origens dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão. E, também é destacado o papel das operações, em particular da adição, na própria construção do número, pois a seqüência numérica só se consolida quando a criança constrói as noções de sucessor e antecessor.

3.7 O número e as relações assimétricas: ressalta a importância do número na construção das séries ou relações assimétricas.

3.8 A síntese dos resultados: aqui, como o próprio título indica, os principais resultados são retomados com o objetivo de proporcionar uma visão global do complexo e longo processo de construção das classes, séries e do número e da interdependência e solidariedade dessas construções.

3.9 Novos e velhos resultados: os resultados das "novas" pesquisas que destacam o papel da contagem na construção do número são comentados à luz de outras pesquisas de Piaget e seus colaboradores sobre o número, enfatizando que os recentes resultados não ultrapassam Piaget, mas, eventualmente, o pressupõem numa compreensão mais totalizante e dinâmica da teoria piagetiana.

3.1 Iniciando a conversa

Nenhuma teoria epistemológica ou mesmo psicológica provocou maior revolução no ensino da matemática do que os trabalhos de Piaget e seus colaboradores. A afirmação de que "conhecer é agir sobre o objeto" fez surgir uma variedade de materiais manipuláveis de conseqüências discutíveis; o isomorfismo por ele estabelecido entre as estruturas-mãe da matemática (Bourbaki) e as da inteligência fundamentou, ainda que *a posteriori*, a recomendação de se "aproximar a matemática da escola da matemática dos cientistas". Com isso, a teoria dos conjuntos, as propriedades das operações e mesmo estruturas de semi-grupo e grupo passaram a ser conteúdo obrigatório dos programas de matemática desde a Educação Infantil. Estas são algumas das situações que exemplificam interpretações pedagógicas da teoria piagetiana que influenciaram o ensino da matemática.

Nenhuma, porém, conquistou tamanha repercussão entre os professores como o fato demonstrado por Piaget de que "não basta de modo algum à criança pequena saber contar verbalmente um, dois, três, etc., para achar-se de posse do número". Para demonstrar esta afirmação, Piaget e Szeminska apresentaram processo complexo para a construção do número, que surge como a síntese da seriação e da classificação (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.15).

Esse fato (o número como síntese da classificação e da seriação) deu origem a diversas interpretações pedagógicas equivocadas por considerarem que esta síntese seria construída de forma linear com a construção primeiro da classificação e da seriação e só depois do número. Assim, de acordo com essa concepção, haveria um “estado” pré-numérico no qual o número seria essencialmente lógico e as propostas pedagógicas para o trabalho com o número que se fundamentavam nessa construção linear e hierárquica variavam desde a “obrigatoriedade” da realização de atividades pré-numéricas ao quase “desterro” do número e, particularmente, da contagem dos programas de matemática para crianças da Educação Infantil e, mesmo até da série inicial do ensino fundamental.

Muitas destas interpretações equivocadas trouxeram conseqüências nefastas ao ensino da matemática; outras geraram críticas injustificadas ao conjunto do trabalho de Piaget e, outras motivaram, felizmente, novas pesquisas que trouxeram contribuições efetivas ao ensino da matemática.

Tamanha repercussão pedagógica de uma teoria seria natural não fosse um aparente paradoxo: as pesquisas de Piaget foram orientadas sempre na busca de soluções de problemas epistemológicos e não na dos problemas do ensino de matemática ou qualquer outra disciplina. Assim, é preciso ficar claro que as adaptações pedagógicas foram sempre realizadas por terceiros, o que justifica, em parte, as diferentes (e mesmo equivocadas) interpretações.

O principal objetivo de Piaget era realizar pesquisas que confirmassem suas especulações teóricas e demonstrassem a continuidade entre o biológico e o mental; a indissociabilidade entre os conhecimentos físico e lógico-matemático, entre outras hipóteses.

Na década de quarenta, além dos aspectos verbais e conceituais do pensamento infantil, que resultaram em *A formação do símbolo na criança*, Piaget já havia analisado as fontes práticas e sensório-motoras do desenvolvimento da criança e publicado seus resultados em duas obras clássicas: *O nascimento da inteligência na criança* e *A construção do real na criança*. Para “ultrapassar essas duas etapas preliminares e atingir os mecanismos formadores da própria razão”, era necessário investigar “como os esquemas sensório-motores da assimilação inteligente se organizam no plano do pensamento em sistemas operatórios”, o que só seria possível mediante o estudo do número. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.11)

As pesquisas acerca da gênese do número não se restringiram apenas às realizadas por Piaget e Szeminska e que resultaram no livro *A gênese do número na criança* (1941). Ao contrário, elas se ampliaram para bem além deste período, com a colaboração da equipe interdisciplinar do Centro Internacional de Epistemologia Genética, a partir da segunda metade da década de cinqüenta e durante os anos sessenta.

Nestes novos trabalhos (comentados por Piaget no prefácio da 3ª edição francesa de *A gênese do número na criança*), realizados por matemáticos, psicólogos, lógicos e epistemólogos como Beth, Grize, Papert, Gréco, Matalon, Morf, Ving-Bang, Inhelder, Berlyne, entre outros, os resultados de Piaget e Szeminska foram reavaliados segundo três direções principais: o exame de novos dados experimentais; a confrontação com as implicações tiradas das diversas axiomatizações e a formalização da síntese deduzida. Os novos estudos foram organizados de forma a "centralizar as pesquisas sobre um ou dois pontos para assegurar a unidade de trabalho da equipe" e a "contemplar os interesses particulares dos membros da equipe para garantir o máximo de rendimento" (PIAGET et al, 1960, p.2).

Estas novas pesquisas completaram e tornaram mais fecundas as hipóteses contidas na obra principal sobre o tema e reforçaram, também, a epistemologia genética do ponto de vista construtivista e estruturalista.

Poucas idéias são tão claras e distintas como a do número inteiro e poucas operações são tão evidentes como as da aritmética elementar, que são acessíveis às crianças. Em outros termos, parece que todos compreendem o que é o número e sabem utilizá-lo das mais diversas formas (PIAGET, 1975).

Esta pode ter sido uma das razões para o fato de que o número já havia atingido altos níveis de abstração nas ciências, como por exemplo, os números complexos ou ainda os transfinitos, antes que questões acerca da sua natureza houvessem incomodado os matemáticos. Porém, ao final do século XIX, a discussão iniciada por Frege sobre a natureza não só dos números como de todo conhecimento matemático ganha corpo, dividindo a opinião dos matemáticos de então, desencadeando a "crise dos fundamentos".

Diversas foram as correntes de pensamento que procuraram responder a esta questão, desde as de fundo psicológico, como as fundamentadas nas teorias empiristas, até às ligadas propriamente à matemática como o logicismo e o intuicionismo, além das diversas axiomáticas.

Dentre as explicações psicológicas fundadas nas teorias empiristas, destacam-se as de Mach e Rignano e a de Helmholtz e dentre as axiomáticas, destacam-se o reducionismo lógico de Russelll e Whitehead e a intuição sintética *a priori* de Poincaré e Brouwer, sem falar na explicação teológica de Kronecker.

> Este contraste entre a evidência instrumental do número e o caos das teorias epistemológicas para explicá-lo, mostra por si só, a necessidade de uma investigação genética: o desconhecimento do pensamento em relação às engrenagens essenciais de seu próprio mecanismo é, com efeito, o índice psicológico de seu caráter elementar e, em conseqüência da antiguidade do nível de formação a que é necessário remontar para poder alcançá-las. (PIAGET, 1975, p.68)

A citação acima, evidencia tanto os objetivos epistemológicos das pesquisas piagetianas sobre o número, como também que, para se atingir as "engrenagens essenciais" do mecanismo do número, é preciso "procurá-las" a partir dos níveis mais elementares do desenvolvimento mental da criança. Assim, é pertinente uma apresentação sucinta da epistemologia genética de Jean Piaget.

3.2 A QUESTÃO DO FORMAL E DO FATO NO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Na introdução de seu livro *A epistemologia genética*, Piaget revela prazer em poder novamente "insistir na noção bem pouco admitida", de que o conhecimento não pode "ser concebido como algo pré-determinado nas estruturas internas do indivíduo", como defendiam os aprioristas, pois estas estruturas "resultam de uma construção efetiva e contínua". (PIAGET, 1990, p.1)

O conhecimento também não poderia ser concebido como pré-existente nos caracteres do objeto, como os empiristas defendiam, pois tais caracteres "só são conhecidos graças à mediação necessária dessas estruturas", com estas últimas os enriquecendo e os enquadrando ou, pelo menos, situando-os no conjunto dos possíveis. Como "todo conhecimento contém um aspecto de elaboração nova", o principal problema da epistemologia é o de "conciliar essa criação de novidades" com o fato de que estas se fazem acompanhar, no campo formal, por "necessidades imediatamente elaboradas" e, no campo real, de conquistas da objetividade (PIAGET, 1990, p.1).

As diferentes epistemologias, diversas correntes dialéticas, a história das ciências ou outros ramos do conhecimento já apresentaram respostas variadas ao problema anteriormente estabelecido. Piaget ao retomar a questão, o faz com a "dupla intenção de construir um método capaz de fornecer controles e, sobretudo, de remontar às origens, portanto, à própria gênese dos conhecimentos", aspecto este desprezado pela epistemologia tradicional, que se detêm apenas nos "estados superiores" desse conhecimento.

> O caráter próprio da epistemologia genética é, assim, procurar distinguir as raízes das diversas variedades de conhecimento a partir de suas formas elementares, e acompanhar seu desenvolvimento nos níveis ulteriores até, inclusive o pensamento científico. (PIAGET, 1990, p.2)

Piaget destacou que, embora o tipo de análise que se dispunha a fazer necessitasse essencialmente de experimentação psicológica, não deveria ser confundido com psicologia pura, pois, o que se propôs (e de fato realizou), foi abordar de forma empírica, questões as quais, até então, vinham recebendo tratamento filosófico. Piaget estabeleceu, dessa forma, como foi reconhecida pela *American Psycological Association*, uma epistemologia científica "separada da filosofia, mas vinculada a todas as ciências humanas" e, ainda, "sem esquecer, naturalmente, a biologia" (PIAGET, 1990, p.2).

Mas não é apenas a psicologia que intervém diretamente na epistemologia de Piaget, a lógica possui o mesmo grau de importância e é nessa dupla intervenção que reside "o núcleo central das dificuldades com as quais se tropeça para chegar a uma interpretação correta" da teoria piagetiana (FERREIRO; GARCIA, in PIAGET, 1975, p.9).

Ao denominar sua epistemologia genética Piaget pretendia deixar claro que as questões epistemológicas necessitam "remontar à gênese" para serem respondidas e que isso se deve, não ao fato de se tentar "contrapor a gênese a outras fases da construção contínua dos conhecimentos", mas, sim, para "mostrar que jamais existem começos absolutos" (PIAGET, 1990, p.3).

Isto significa, em outras palavras, chamar a atenção para "a existência de uma construção indefinida" e, principalmente, para a necessidade de conhecer o máximo possível de todas as fases, para poder compreender "as razões e o mecanismo" da construção do conhecimento, seja ele da ciência (sociogênese), ou do indivíduo (psicogênese) (PIAGET, 1990, p.3).

> Piaget não pretende explicar a ontogênese a partir da sociogênese do conhecimento, nem a inversa; tampouco pretende sugerir que a ontogênese recapitula a sociogênese. [...] O que interessa a Piaget, [...], é encontrar um modelo geral explicativo da passagem de um estado de menor conhecimento a outro de maior conhecimento; as comparações entre ambos os tipos de gêneses apontam para a consideração dos mecanismos gerais de organização, desequilíbrio e reequilibração. (FERREIRO; GARCIA, in PIAGET, 1975, p.9)

Como a natureza de "uma realidade viva não somente se apresenta em seus estados iniciais ou em seus estados finais, mas sim no processo de suas transformações", o método adequado para realizar as investigações em epistemologia genética emerge da cooperação íntima entre o método psicogenético e o método histórico-crítico (PIAGET, 1975, p.35).

É assim, com as análises oscilando entre a gênese e o equilíbrio final e estes sempre considerados como relativos entre si, que Piaget acredita ser possível "alcançar o secreto da construção dos conhecimentos, isto é, a elaboração do pensamento científico" (PIAGET, 1975, p.35).

3.2.1 A PSICOGÊNESE DOS CONHECIMENTOS

É primordial, para uma epistemologia que queira ser científica, não se preocupar inicialmente em definir o que é o conhecimento, como o fazem as tradicionais teorias do conhecimento de sustentação filosófica. Uma boa ilustração para este fato é que "a geometria evita decidir previamente o que é o espaço, a física rechaça investigar a princípio o que é a matéria e a psicologia não toma partido acerca da natureza do espírito" (PIAGET, 1975, p.30).

Dessa forma, a epistemologia genética assume que o conhecimento existe e o problema é estudar então, *como se passa de um estado de menos conhecimento, para um de mais conhecimento.*

No estudo dessa passagem, Piaget distingue quatro estádios principais. É importante frisar que se trata de estádios ou períodos, e isto significa que não apenas toda criança passa por eles, mas, também, que neles permanece por algum tempo, em função de um equilíbrio temporário, como todos os estados de equilíbrio evidenciados pela psicologia genética.

- Estádio da inteligência sensório-motora (até dois anos);
- Estádio da inteligência simbólica ou pré-operatória (de 2 a 7-8 anos);
- Estádio da inteligência operatória concreta (de 7-8 anos a 11-12 anos);
- Estádio da inteligência operatória formal (a partir dos 12 anos).

Esta divisão não é estabelecida arbitrariamente, ao contrário, ela segue parâmetros bem definidos, que nada tem a ver com desenvolvimento fisiológico, de peso, de tamanho ou de idade. As idades aproximadas que delimitam os estádios foram estabelecidas a partir das investigações realizadas.

Os critérios utilizados por Piaget para a distinção entre os estádios, são cinco, a saber:

a) A ordem de sucessão das aquisições deve ser constante, não no que se refere à cronologia, já que esta varia tanto em função da maturação do sujeito como em virtude de suas experiências anteriores, assim como do meio social.

b) O caráter integrativo dos estádios, isto é, as estruturas construídas num determinado nível são integradas nas estruturas do nível seguinte. “Assim, as estruturas sensório-motoras são parte integrante das estruturas operatório-concretas; estas o são, por sua vez, das operações formais”. (DOLLE, 1975, p.53)

c) Cada estádio deve se caracterizar por uma estrutura de conjunto, permitindo sua caracterização por leis de totalidade.

d) Cada estádio comporta ao mesmo tempo a preparação de uma nova estrutura e o acabamento de outra.

e) A preparação de aquisições posteriores pode incidir sobre mais de um estádio e, além disso, existem diversos graus de acabamento, o que produz a necessidade de se distinguir, em toda seqüência de estádios, os processos de gênese (formação) e as formas de equilíbrio final (relativas). Apenas estas últimas podem constituir estruturas de conjunto conforme mencionado no item anterior.

3.2.2 O NÍVEL SENSÓRIO-MOTOR

A idéia mais original apresentada pela teoria epistemológica de Piaget foi a de que é a "ação que é constitutiva de todo conhecimento", e esta "primazia da ação se sustentará geneticamente a partir da análise das condutas mais elementares do recém-nascido" (FERREIRO; GARCIA, in PIAGET, 1975, p.15).

O sujeito conhece, então, apenas as propriedades das coisas que sua ação possibilita. O mundo do recém nascido, por exemplo, se compõe de coisas que ele pode chupar, agarrar, ver e ouvir. Tais coisas não constituiriam objetos do mundo físico, com suas funções claramente estabelecidas, mas, sim, impressões sensoriais complexas, que não podem ser completamente atribuídas nem ao mundo externo, nem ao mundo interno.

Dessa forma, "o instrumento de troca inicial não é a percepção, como os racionalistas concederam com excessiva facilidade ao empirismo, mas a própria ação em sua plasticidade muito maior". Dois períodos distintos podem ser caracterizados em função da natureza das ações envolvidas; o das ações sensório-motoras, sem linguagem e sem conceituação representativa e o das ações que são completadas por essas propriedades. São essas ações do período intuitivo ou pré-operatório que apresentam "o problema da tomada de consciência dos resultados, intenções e mecanismos do ato, ou seja, de sua tradução em termos de pensamento conceitualizado" (PIAGET, 1990, p.15).

Piaget não reduz a ação a seus resultados úteis, "como o pragmatismo a concebe, mas salienta antes de tudo o seu poder na construção dos conhecimentos", pois é na interação efetiva, no esquematismo e na coordenação das ações que "se encontra a origem da coerência e da necessidade lógico-matemática" (MONTOYA, 1996, p.32).

É também a coordenação das ações que permitirá a progressiva diferenciação entre sujeito e objeto e a conseqüente constituição de ambos, a do sujeito, enquanto sujeito cognoscente e a do objeto, enquanto objeto do conhecimento.

> Em suma, a coordenação das ações do sujeito, inseparável das coordenações espaço-temporais e causais que ele atribui ao real, é origem tanto das diferenciações entre esse sujeito e os objetos quanto dessa descentração no plano dos atos materiais que tornará possível, com o concurso da função semiótica, o advento da representação ou do pensamento. (PIAGET, 1990, p.11)

Estas coordenações podem ser de duas espécies: as que se referem às ações do sujeito, ligando-as entre si e as que se referem às ações entre os objetos. Ao estabelecer ligações entre suas diferentes ações, o sujeito as reúne, separa, ordena, coloca em correspondência, etc., estabelecendo as primeiras formas dessas coordenações gerais sobre as quais se fundam as estruturas lógico-matemáticas. Por outro lado, ao relacionar as ações entre os objetos, o sujeito os organiza no espaço e no tempo, conferindo-lhes uma organização cinemática ou dinâmica, da mesma forma como fez com suas próprias ações, originando daí, as estruturas causais tão importantes quanto às lógico-matemáticas.

Com relação às coordenações particulares das ações do sujeito sobre os objetos, em oposição às coordenações mais gerais, geradoras das estruturas lógico-matemáticas, elas interferem na causalidade sempre que modificam materialmente esses objetos ou seus arranjos.

> Como produto das coordenações, no intervalo de zero a dois anos se realiza, no plano das ações materiais, uma espécie de revolução copernicana que consiste em descentrar as ações em relação ao corpo, em considerar este como um objeto entre os demais, num espaço que a todos contém. Contrariamente às ações primitivas, que formam um todo fechado em si mesmo (montagens hereditárias), as ações posteriores chegam gradualmente a se coordenarem entre si até constituírem uma conexão entre os meios e os fins, o que caracteriza os atos da inteligência propriamente dita. (MONTOYA, 1996, p.33-34)

O principal acontecimento desse período, que prefigura as futuras operações, é a constituição do "grupo" prático dos deslocamentos, com sua invariante constituída pela permanência do objeto que se desloca. Todavia, os regressos aos pontos de partida, que seriam o equivalente prático da reversibilidade característica dos grupos matemáticos, assim como os desvios, equivalentes da associatividade, somente são obtidos mediante ações sucessivas, sem a representação simultânea de conjunto, condição imprescindível para a efetivação da reversibilidade operatória.

O período sensório-motor puro, anterior à linguagem, já apresenta relacionamentos, reuniões, dissociações, correspondências, etc., enfim, todo um esquematismo que permite antever as futuras operações, mas sempre no seio de ações que se desenrolam no tempo.

É a partir das ações mais elementares exercidas sobre a realidade que a percepção distingue os mais variados elementos, ligando-os por semelhanças e diferenças. Tais ligações, contudo, são somente perceptuais e relacionadas com a atividade motora, não se compondo entre si nem do ponto de vista lógico e nem aritmético.

> Através da combinação destas ações iniciais de reunião e de separação, as operações intelectuais construirão, simultaneamente as classes agrupando os objetos por suas semelhanças mais ou menos gerais ou especiais, as relações assimétricas agrupando os mesmos objetos por suas diferenças ordenadas, e os números, agrupando os objetos enquanto são, ao mesmo tempo, equivalentes e distintos. (PIAGET, 1975, p.99)

A primeira etapa desta construção que conduz, simultaneamente, às classes, às relações e aos números, consiste em coordenar as ações entre si, na forma de esquemas práticos, os quais, ao engendrarem a permanência dos objetos, “constituem as relações de semelhança, diferença e a quantificação inicial nas quais se pode buscar a fonte das estruturas lógicas e numéricas”. (PIAGET, 1975, p.100)

A seguir, com o início das relações perceptuais, começam as coordenações das relações entre si, os chamados “esquemas práticos”, que são espécies de pré-conceitos sensório-motores e possibilitam a repetição da mesma ação na presença dos mesmos objetos ou ainda a generalização, que nada mais é do que a realização da mesma ação na presença de objetos semelhantes.

As relações perceptuais das atividades sensório-motoras não se compõem entre si, são intrínsecas, irreversíveis, não associativas e estão, inclusive, desprovidas da identidade elementar. Em outras palavras, essas relações se distinguem entre si apenas no interior do campo perceptual momentâneo.

Todavia, para produzir a conservação dos objetivos físicos, os esquemas elementares constituem relações de semelhança, diferença e quantificações, primitivas é verdade, mas que constituem a fonte das futuras estruturas lógicas ou numéricas. É necessário compreender, também, que se as ações assim esquematizadas já equivalem, na sua forma mais geral, à reunião ou separação dos objetos por elas distinguidos e conservados.

Em função dos diversos objetivos qualitativos abordados, as reuniões e separações, assim como as figuras pré-numéricas que constituem se apóiam, por sua vez, num poder coordenador cujos esquemas mostram as estruturas sucessivas e cujo funcionamento remonta até os mecanismos hereditários de raízes desconhecidas. Portanto, sob o ponto de vista genético, não existe nunca um fato primeiro, mas sim, uma sucessão de etapas cuja lei e cujo mecanismo de passagem de uma a outra são os únicos passíveis de análise (PIAGET, 1975, p.100).

3.2.3 O PERÍODO PRÉ-OPERATÓRIO OU INTUITIVO

Neste período, a estrutura dos agrupamentos concretos está sendo preparada (o acabando será efetuado no período seguinte), e caracteriza-se pela preparação e organização das operações concretas. Do ponto de vista das limitações este período caracteriza-se principalmente pela "dificuldade em apreender as transformações e, conseqüentemente, em atingir as invariantes solidárias de qualquer transformação reversível". (PIAGET, et al, 1980, p.326).

O período pré-operatório varia em média dos dois aos sete anos de idade e pode ser subdividido em dois níveis.

3.2.3.1 O PRIMEIRO NÍVEL DO PENSAMENTO PRÉ-OPERATÓRIO

Variando em média dos dois aos cinco anos, o principal acontecimento desse período é o aparecimento da linguagem. As ações sensório-motoras vão gradualmente se interiorizando em representações. Como é muito mais difícil realizar ações mentalmente do que materialmente, pois as primeiras necessitam serem traduzidas simbolicamente por palavras, ou por imagens, a conquista da reversibilidade não acontece imediatamente, ao contrário, a criança permanece um longo período com regulações apenas “semi-reversíveis, sem atingir ainda a reversibilidade inteira ou operatória” (PIAGET, et al, 1980, p.326).

O período sensório-motor apresenta um grande desenvolvimento que parte das ações elementares iniciais (que ainda não possibilitam uma diferenciação entre sujeito e objeto, por não estarem coordenadas entre si) e chega até as coordenações com diferenciações. São estas coordenações com diferenciações que garantem a existência dos primeiros instrumentos de interação cognitiva, os quais, entretanto, estão ainda situados no plano da ação atual e efetiva, não se refletindo num sistema.

A estrutura ou o grupo dos deslocamentos sensório-motor que aparece por volta dos 18 meses (com o período anterior dedicado à sua preparação e o posterior ao seu acabamento), mesmo capaz de realizar desvios, de retornar ao ponto de partida, de coordenar rotações e translações, ainda se efetiva por movimentos sucessivos e não por representações simultâneas.

A estrutura de grupo que se constituiu não está concebida em pensamento devido à inexistência de instrumentos semióticos que possibilitem a sua conscientização.

Esta situação se modifica substancialmente com o advento da linguagem, da imitação, do jogo simbólico, da imagem mental, enfim, da constituição de um sistema de representação que permite aos esquemas da inteligência sensório-motora ser “manipulados por um pensamento”.

Assim, as ações simples, “que asseguram as interdependências diretas entre o sujeito e os objetos”, são sobrepujadas, em alguns casos, por “um novo tipo de ações, o qual é interiorizado e mais precisamente conceitualizado” (PIAGET, 1990, p.15).

A representação nascente enfrenta, todavia, inúmeras dificuldades, pois a interiorização das ações em pensamento não se resume a reproduzir-lhes o curso ou a imaginá-las mediante a utilização de símbolos (imagens mentais) ou signos (linguagem). Ao contrário, durante a representação as próprias ações são enriquecidas, modificadas e reconstruídas num patamar superior, implicando, portanto, na “elaboração de uma série de atividades irredutíveis ao patamar inferior”, através da abstração reflexionante (PIAGET, 1990, p.17).

> A razão essencial dessa defasagem entre as ações sensório-motoras e a ação interiorizada ou conceitualizada é que as primeiras constituem, mesmo no nível em que existe a coordenação de vários esquemas, uma série de mediadores sucessivos entre o sujeito e os objetos, mas cada um dos quais permanece puramente atual; ela já se faz acompanhar, é verdade, de uma diferenciação entre esse sujeito e seus objetos, mas nem aquele nem estes são pensados como revestidos de quaisquer outras características a não ser as do momento presente. Ao nível da ação conceitualizada, pelo contrário, o sujeito da ação (quer se trate do eu ou de um objeto qualquer) é pensado com suas características duradouras (predicado ou relações), os objetos da ação também, e a própria ação é conceitualizada como transformação particular no âmbito de muitas representáveis entre os termos dados ou entre termos análogos. (PIAGET, 1990, p.17-18)

O pensamento possibilita à ação situar-se num contexto espaço-temporal mais amplo, pois permite “evocar num todo quase simultâneo ações ou eventos passados, futuros ou presentes, e, espacialmente, tanto distantes quanto próximos”, rumo à descontextualização necessária à reversibilidade e caminhando sempre em direção das futuras coordenações internas do sujeito (estruturas lógico-matemáticas) e externas entre objetos (causalidade) (PIAGET, 1990, p.18).

O conhecimento representativo do período pré-operatório apresenta, desde os seus primórdios, consideráveis progressos com vistas à interiorização das ações, como por exemplo, a capacidade de realizar inferências elementares, de classificações de configurações espaciais, de correspondências, além de um começo das explicações causais.

As novidades essenciais desse período em relação ao sensório-motor, não são originadas unicamente das transmissões verbais, pois a possibilidade de conceber as ações em pensamento, que constitui a origem do sistema de representação, deve ser creditada à função semiótica em geral e não somente à linguagem.

> Em outras palavras, a passagem das condutas sensório-motoras para as ações conceitualizadas deve-se não apenas à vida social mas também aos progressos da inteligência

> pré-verbal em seu conjunto e à interiorização da imitação em representações. Sem estes fatores prévios, em parte endógenos, tanto a aquisição da linguagem quanto as transmissões e interações sociais seriam impossíveis, pois eles constituem uma das condições necessárias destas. (PIAGET, 1990, p.19)

A criança não passa bruscamente dos esquemas sensório-motores ao conceito e isso se deve ao fato de que a passagem da ação ao pensamento acontece sob a forma de uma difícil e demorada diferenciação "ligada às transformações da assimilação", no plano da representação (PIAGET, 1990, p.19).

A criança desde o princípio procura exercer o controle sobre a aquisição e coordenação de suas próprias experiências e faz isso mediante o duplo processo de acomodação e assimilação. Em outras palavras, ao se deparar com situações que resistem aos esquemas aos quais está habituada, a criança necessita modificar tais esquemas (acomodação); outras situações possibilitam ações que geram resultados novos, enriquecendo o alcance e a variedade de seus esquemas (assimilação). Do equilíbrio entre esses dois processos é que se alcança uma adaptação ao mundo real e a conseqüente organização mental.

Assim, mediante as transformações da assimilação que ao estenderem os seus domínios produzem a mudança nas atividades do sujeito, a ação vai se interiorizando progressivamente. A assimilação pertinente aos conceitos em seu estado final (momentâneo), "envolve essencialmente os objetos a eles subordinados e suas características", e é essa assimilação dos objetos entre si, constituindo o fundamento da classificação, que leva a determinação do "todos" e do "alguns", a primeira propriedade necessária para a construção do conceito (PIAGET, 1990, p.20).

A forma de assimilação característica dos níveis sensório-motores também considera as propriedades dos objetos, só que o faz "exclusivamente no momento em que eles são percebidos e de forma indissociada em relação às ações do sujeito a que eles correspondem".

> A grande distinção epistemológica entre as duas formas de assimilação por esquemas sensório-motores e por conceitos é, portanto, que a primeira ainda diferencia mal as características do objeto das características das ações do indivíduo em relação a esses objetos, ao passo que a segunda forma envolve somente os objetos, mas tanto os

> ausentes quanto os presentes, e ao mesmo tempo liberta o indivíduo de seus vínculos com a situação atual, conferindo-lhe então o poder de classificar, seriar, por em correspondência, etc., com muito mais mobilidade e liberdade. (PIAGET, 1990, p.21)

É a diferenciação entre as formas de assimilação que permite a passagem dos esquemas sensórios-motores aos conceitos, entretanto, o que interessa é determinar como se dá essa passagem da assimilação direta e indiferenciada dos elementos considerados, no nível sensório-motor, para uma assimilação conceitual.

O mecanismo ou processo que determina essa passagem é o da abstração reflexionante. Este processo "não retira a sua substância dos objetos como tais ou das ações do sujeito" em seus caracteres observáveis, o que é pertinente à abstração empírica, mas sim, das "coordenações de ações do sujeito, que podem permanecer inconscientes ou dar lugar a tomadas de consciência e conceitualizações variadas" (MONTOYA, 1996, p.44).

A abstração reflexionante se efetiva mediante a coordenação de dois aspectos inseparáveis: o reflexionamento e a reflexão.

> [...] assim, ela é reflexionante em dois sentidos complementares, a que nós designaremos como segue. Em primeiro lugar, ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo 'reflexionamento' (*réfléchissement*). Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou por em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante será designada por "reflexão" (reflexion). (PIAGET, 1995, p.6)

Retomando o isomorfismo entre o edifício matemático e as estruturas elementares do sujeito, pode-se destacar o trabalho atual dos matemáticos, os quais, por meio da abstração reflexionante, extraem novas operações a partir de operações anteriormente estabelecidas ou, estruturas novas a partir da comparação com estruturas anteriores. Dentro da ciência matemática o processo de abstração reflexionante caracteriza-se particularmente pelo fato de que, mesmo enriquecendo as noções mais fundamentais com novas estruturas ou operações, estas noções não são desprezadas ou contraditas, ao contrário, são reorganizadas de maneira imprevisível. Além disso, o que num momento é considerado como uma estrutura matemática, num momento seguinte, pode ser um objeto de reflexão num patamar superior.

Em resumo, duas são as principais novidades encontradas ao final do primeiro período do pensamento pré-operatório. Uma é que já existem mediadores entre o sujeito e o objeto embora estes sejam apenas pré-conceitos e pré-relações, pois a determinação do "todos" e do "alguns" ainda não é exata no caso dos conceitos e a relatividade das noções não é estabelecida com clareza no caso das relações. Além disso, já é possível se detectar a atribuição de uma causalidade aos objetos embora esta permaneça psicomórfica, devido à indiferenciação completa em relação às ações do sujeito.

As aquisições deste período (pré-conceitos e pré-relações) se encontram a meio caminho entre o esquema de ação e o conceito, "por não se dominar com bastante distanciamento a situação imediata e presente, como deveria ser o caso da representação em contraste com a ação" (PIAGET, 1990, p.23).

3.2.3.2 O SEGUNDO NÍVEL PRÉ-OPERATÓRIO

Este segundo período, que varia em média dos 5-6 aos 7-8 anos, caracteriza-se por uma descentração nascente que possibilita o estabelecimento de ligações objetivas entre objetos, eventos ou ações.

No que se refere à lógica como conseqüência da coordenação entre as ações conceitualizadas, a natureza das classificações é modificada, promovendo uma diferenciação constante entre o indivíduo e a classe.

No primeiro nível deste período as classificações ainda consistem em "coleções figurais", isto é, a criança junta os elementos num conjunto porque eles combinam entre si, por razões arbitrárias, como, por exemplo, formar uma casa. As crianças deste nível ficam presas, principalmente, às suas semelhanças perceptivas, o que torna as relações figurais uma forma transitória entre os esquemas sensórios-motores e as classes representativas.

As relações figurais são transitórias, pois, da mesma forma que os esquemas sensórios-motores, elas assimilam os objetos entre si, “de maneira direta e segundo suas funções práticas ou suas semelhanças”, sem levar em conta a extensão dos mesmos. Além disso, da mesma forma que as classes representativas, a “coleção figural é uma unidade representativa à qual se poderia atribuir uma extensão como aquela que é própria aos conjuntos perceptivos” (MONTOYA, 1996, p.43).

Todavia, com a mudança da natureza das classificações permitindo dissociar o indivíduo das classes, as coleções deixam de ser figurais passando a constituir pequenos grupos de objetos, sem configuração espacial, evidenciando a marcha rumo à “desespacialização” característica das operações lógico-matemáticas. O que continua ainda sem “acabamento final”, no nível em pauta, é a determinação do “todos” e do “alguns”, uma vez que para compreender que A está contido em B, é necessário tanto a reversibilidade explicitada por A = B - A’, como a conservação necessária do todo B, uma vez separado A de seu complementar A’. A inexistência da reversibilidade e da conservação do todo B, impossibilitam as conservações das quantidades, contínuas ou descontínuas. Por outro lado, a identidade qualitativa dos elementos já está plenamente constituída, porém esta, embora necessária não seja suficiente para as conservações.

A identidade qualitativa é uma condição prévia para a conservação, mas não é suficiente porque somente possibilita perceber as qualidades que são modificadas e as que não o são. A conservação quantitativa pressupõe a construção de relações novas, como por exemplo, a compensação das variações de sentidos diferentes e, conseqüentemente, a reversibilidade operatória com seus respectivos instrumentos de quantificação (PIAGET, 1990).

Toda quantidade é um contínuo e apresenta-se como um caráter irredutível das coisas, apreendido graças a ações particulares do sujeito. Existem três tipos de quantidades, cada um dos quais com uma explicação psicológica e axiomática diferente.

Quantidade intensiva: define as relações de parte e todo e se limita a afirmar que o todo é maior que a parte ou que uma parte tem a mesma grandeza que ela mesma, mas, sem comparar uma parte qualquer com uma outra. É uma noção bastante primitiva, mas que já permite algumas operações sobre os objetos, em especial a composição aditiva das partes e do todo. Um bom exemplo da utilização desse tipo de quantificação é quando comparamos a quantidade de uma substância em relação à outra que a contem, como no caso de estabelecer a concentração de açúcar numa determinada quantidade de mel; a quantidade de limão numa determinada quantidade de limonada, etc. Supõe o uso de *quantificadores lógicos*, como *um*, *todos*, *alguns* e *nenhum*. Essa *quantidade intensiva* é suficiente para basear a lógica das classes, pois esta é limitada a uma decisão sobre *todos* ou *alguns*. Na verdade, esse tipo de quantidade é o único que intervém em lógica, mas intervém em todo agrupamento lógico.

Quantidade extensiva: permite estabelecer relações de diferenças entre as partes de uma classificação ou as diferenças de uma seriação sem que sejam igualadas as partes A, A', B, B', etc., ou as diferenças a, a', b, b', etc. As relações que se estabelecem obedecem a uma lei qualquer de construção: por exemplo, uma série de diferenças crescentes ou decrescentes; proporções, relações harmônicas, etc. Ainda não é possível a medida utilizando-se unidades, mas, com o uso do quantificador *quase todos*, há a possibilidade de comparação das partes entre si. Por exemplo: se A+A'= B e se é conhecido que A contem *quase todos* os elementos de B, concluir-se-á que A>A', o que não era possível somente com as quantidades intensivas. Por exemplo, quando dizemos: quase todos os alunos de uma turma são meninos, está implícito que o conjunto dos alunos é composto de duas partes, meninos e meninas, mas que a "parte" dos meninos é maior que a das meninas. Tem-se então uma quantificação que, sem ser métrica, ultrapassa a da simples lógica. Este tipo de quantidade é chamado de extensiva.

Quantidade métrica: sejam A+A'= B, e a+a'= b tal que seja possível igualar os termos A = A' ou as diferenças a = a'. Têm-se então: B = 2A, C = 3A, etc., ou b = 2a; c = 3a, etc., isto é, uma sucessão de números ou de segmentos, daí a existência de um outro tipo de quantidade, que também permite comparar as partes entre si e, portanto, é extensiva, mas, como pode, também, especificar esta comparação, mediante unidades. Logo, essa quantidade é métrica, no caso dos segmentos, ou numérica, no caso dos termos. Em outras palavras, a quantidade métrica significa que se considerou uma parte do todo que se pode iterar como unidade. A quantidade métrica pode ser utilizada tanto com grandezas discretas, quanto com grandezas contínuas. Por exemplo, no caso de quantidades discretas, quando dizemos que numa cesta existem doze maçãs, uma maçã é uma parte do todo, que foi considerada como unidade na determinação da quantidade total. Agora, no caso de quantidades contínuas, quando dizemos que uma jarra contém doze copos de suco, um "dado" copo iterou como unidade para determinar a quantidade de suco da jarra.

Assim, a partir da quantidade intensiva, sobe-se um degrau com a quantidade extensiva não métrica, pois não se trata mais apenas de séries intensivas, mas do estabelecimento de um relacionamento entre as partes ou diferenças, para só então se considerar uma parte como unidade, alcançando a quantificação métrica.

No período intuitivo, as quantificações são ainda nascentes e não constituídas, uma vez que nesse nível também não se encontram inferências como a transitividade, por exemplo, tanto no que se refere à passagem da ação ao conceito, quanto à causalidade.

3.2.4 O período operatório "concreto"

Esse estádio apresenta grandes novidades, pois é a primeira vez, no desenvolvimento intelectual de uma criança, que é possível falar de operações, aqui entendidas como ações suficientemente coordenadas entre si, de modo a constituírem uma estrutura de conjunto. As operações no período em pauta são, todavia, concretas, no sentido de só se desenrolarem na presença de dados concretos e, "em particular, que a sua necessidade é de fato e não ainda de direito" (GRIZE, in PIAGET et al, 1980, p.238).

Nesse período, que varia em média dos 7-8 aos onze ou doze anos, a criança se torna capaz de uma reversibilidade relativa às operações concretas, isto é, sobre classificações e relações que incidem ainda sobre objetos manipuláveis e não sobre hipóteses ou enunciados verbais.

Aparecem, também, as "operações sobre operações", fonte das operações proposicionais, as quais, em analogia com o estágio anterior, no qual acontecia a "interiorização dos esquemas sensório-motores", podem ser consideradas como "interiorizações das operações concretas", com o devido acréscimo de novas propriedades (MONTOYA, 1996).

Nesse nível do "concreto", agindo sobre objetos manipuláveis, a criança já realiza inclusão hierárquica de classes e constrói séries coordenando os dois sentidos do percurso (do menor para o maior e vice-versa), o que possibilita que a transitividade se torne evidente para ela. Além disso, é capaz também de estabelecer inferências e correspondências e de conceber (e compreender) as matrizes multiplicativas.

As estruturas operatórias reversíveis deste estágio caminham no sentido da constituição de um "agrupamento". Porém, como os "agrupamentos" não possuem a generalização combinatória de uma estrutura de "rede" ou "reticulado" e, porque as operações em pauta são ainda concretas, a reversibilidade conquistada é elementar, pois as formas lógicas assim elaboradas dependem de seu conteúdo, permanecendo ligadas aos processos temporais inerentes à manipulação.

Assim, se no estágio anterior acontece uma expressiva desespacialização, as operações ainda permanecem, no presente estágio, com características temporais, impedindo a constituição da reversibilidade completa, que somente será atingida no estágio posterior. A reversibilidade própria desse estágio "se apresenta sob duas formas irredutíveis e jamais relacionadas entre si: a inversão e a reciprocidade", onde a inversão é a forma de reversibilidade característica das estruturas de classes e a reciprocidade, a das estruturas de série (MONTOYA, 1996, p.52).

Esse período, que se caracteriza como de acabamento das estruturas operatórias concretas e transição para as estruturas formais pode ser subdividido em dois níveis.

3.2.4.1 O PRIMEIRO NÍVEL DO ESTÁGIO DAS OPERAÇÕES "CONCRETAS"

O início do estádio das operações concretas é um marco decisivo na construção dos instrumentos do conhecimento, pois as ações interiorizadas adquirem a categoria de operações e enquanto transformações reversíveis modificam certas variáveis e conservam outras a título de invariantes (PIAGET, 1990, p.28).

As operações neste período apresentam uma diferença de natureza fundamental em relação às ações do período anterior.

As ações do período intuitivo eram ainda temporais, ao passo que agora, a reversibilidade operatória, admite as antecipações e retroações simultâneas, tornando as operações atemporais.

O maior problema deste estádio consiste em explicar essa importante novidade pois as operações não possuem um começo absoluto, ao contrário, procedem de transformações mais ou menos contínuas.

> Com efeito, jamais se observam começos absolutos no decorrer do desenvolvimento, e o que é novo decorre ou de diferenciações progressivas, ou de coordenações graduais, ou das duas coisas ao mesmo tempo, conforme se pôde constatar até aqui. Quanto às diferenças de natureza separando as condutas de um estágio das que as precederam, só se pode então concebê-las como uma passagem ao limite, cujas características têm que ser interpretadas em cada caso. (PIAGET, 1990, p.29)

De maneira geral, pode-se dizer essa passagem ao limite caracteriza o surgimento das operações e consiste em apresentar uma pré-correção das falhas eventuais na realização de um ato ao invés de corrigir posteriormente. Isso só é possível devido ao "duplo jogo das operações diretas e inversas" que permitem "uma antecipação possível das próprias retroações" (PIAGET, 1990, p.30).

Além dessa passagem ao limite descrita anteriormente, acontece uma outra, que é solidária à precedente e que conduz ao fechamento dos sistemas ou acabamento das operações. Por exemplo, antes de classificar e seriar operatoriamente, o sujeito dava conta dessas tarefas, porém, só seriava por tentativas e só construía coleções, figurais ou não, mas sem a inclusão hierárquica. Da mesma forma, antes da síntese do número, a criança já sabe contar até determinados inteiros, porém sem conservação do todo.

A estrutura operatória final, como por exemplo, a inclusão hierárquica de classes ou o número, é o resultado de uma construção contínua e, com a fusão das antecipações e retroações que acarreta o fechamento sobre si mesmo, aparece uma novidade essencial: não existem mais relações sem conexão com as precedentes.

Essa interdependência necessária entre as relações internas de um sistema operatório manifesta-se "então, sob a forma de duas propriedades solidárias, doravante gerais em todas as estruturas operatórias deste nível: a transitividade e as conservações". (PIAGET, 1990, p.315)

Esse nível se diferencia do precedente pelas passagens ao limite anteriormente citadas as quais são bastante complexas e envolvem três momentos integrados, porém distintos.

O *primeiro* se refere à abstração reflexiva que garante a continuidade do desenvolvimento, ao extrair das estruturas inferiores o que é necessário para a construção das superiores. O *segundo* momento é o de uma coordenação que pretende abarcar a totalidade do sistema caminhando para o fechamento e, portanto, ligando entre si as diversas relações internas. O *terceiro* e último momento é o da "auto-regulação desse processo coordenador, culminando na equilibração das conexões segundo os dois sentidos, direto e inverso, da construção, de tal modo que" a obtenção desse equilíbrio caracteriza essa passagem ao limite possibilitando os progressos desse período, principalmente, a reversibilidade operatória (PIAGET, 1990, p.33).

Piaget dá um exemplo particularmente interessante para descrever as três fases encontradas na passagem ao limite que diferencia a operação das ações dos níveis precedentes, no que se refere à síntese do número: a abstração reflexiva; uma coordenação nova que reúne as ligações internas ao sistema e a equilibração que permite percorrer o sistema nos dois sentidos.

A principal característica de um conjunto numérico ou enumerável que se destaca das coleções simplesmente seriáveis ou classificáveis dos períodos anteriores é a abstração das qualidades individuais dos termos, de maneira a tornar todos equivalentes e possibilitar a contagem. Por exemplo, quando vamos contar as pessoas de uma sala que estão de óculos, não levamos em consideração se são homens ou mulheres, adultos ou crianças, enfim, as qualidades individuais não importam e sim uma única qualidade comum, que os homogeneíza: usar óculos. A seguir, os elementos tornados equivalentes são distribuídos em classes hierarquicamente incluídas: $(I) < (I + I) < (I + I + I)$, etc., porém com a condição de que cada uma dessas classes possa ser diferenciada das demais, para evitar a um mesmo elemento ser contado duas vezes ou permanecer esquecido.

Todavia, ao tornar os elementos equivalentes pela abstração das qualidades individuais, eles se tornam indiscerníveis e, se as operações realizadas com eles fossem apenas as da lógica das classes qualitativas, o resultado seria tautológico, ou seja, I + I = I, ao invés da iteração I + I = II, o que implica na necessidade de uma distinção entre os elementos. Não se levando em conta a qualidade, a única possibilidade de distinção que resta, é a resultante da ordem, que pode ser a das posições no espaço e no tempo, ou a da ordem de enumeração, embora esta ordem não se altere quando há permuta entre os termos.

No caso do exemplo anterior, da contagem de pessoas de óculos que estão num determinado recinto, é necessário estabelecer uma "ordem" para a contagem, do tipo, da esquerda para a direita e da frente para o fundo da sala, por exemplo.

Esta ordem é *vicariante*, pois se duas pessoas trocarem de lugar o resultado da contagem não será alterado.

É possível observar então, no processo descrito anteriormente, os três momentos essenciais de toda construção operatória: uma abstração reflexiva que estabelece as ligações de encaixe e de ordem; uma coordenação nova que as reúne numa totalidade como as do tipo {[(I)→(I)] → (I)}..., etc., e uma "auto-regulação ou equilibração que permite percorrer o sistema nos dois sentidos (reversibilidade da soma e da subtração), assegurando a conservação de cada conjunto ou subconjunto" (PIAGET, 1990, p.35).

> O número apresenta-se, portanto, como uma fusão operatória da inclusão de classes e da ordem serial, síntese que se torna necessária logo que se faz a abstração das qualidades diferenciais em que as classificações e as seriações se fundamentam. De fato, é assim que parece efetuar-se a construção os números inteiros, em sincronização com a formação dessas duas outras estruturas. (PIAGET, 1990, p.34)

Apesar de uma vez mais Piaget apresentar o número como "síntese da classificação e da seriação" o que pode sugerir uma construção seqüencial e linear, no presente caso, o próprio autor deixa claro que essa síntese não é efetivada apenas "após terem sido realizadas as estruturas de seriação e classificação".

> Isso não quer dizer, aliás, que essa síntese do número efetua-se após terem sido realizadas as estruturas de classificação e de seriação, pois já nos níveis pré-operatórios encontram-se números figurais sem conservação do todo, e a construção do número pode

> favorecer a das inclusões de classes tanto ou, às vezes mais do que o inverso: parece, pois, que a partir das estruturas iniciais já pode haver abstração reflexiva e de ordem para fins múltiplos, com trocas colaterais variáveis entre as três estruturas fundamentais de classes, relações e números. (PIAGET, 1990, p.35)

É importante evidenciar a afirmação de Piaget na citação anterior "a construção do número pode favorecer a das inclusões de classes tanto ou, às vezes mais do que o inverso", evidenciando o processo solidário de construção das três estruturas fundamentais que será detalhado mais adiante.

Apesar dos avanços consideráveis que possibilitam ao pensamento as operações concretas apresentam limites característicos, pois incidem diretamente sobre os objetos. Isto equivale a agir sobre tais objetos, como nos níveis anteriores, com a diferença, porém, de que essas ações possuem agora uma estrutura operatória, isto é, são reversíveis e transitivas.

Por serem dependentes dos objetos, as operações concretas se aplicam com defasagens cronológicas a conteúdos diferentes, pois a forma, nesse caso, não pode ser dissociada do conteúdo.

É por essa razão que embora já possua a conservação das quantidades discretas, que lhe permite a construção do número em torno dos sete ou oito anos, a criança só possui domínio sobre a conservação do peso e suas propriedades por volta dos nove ou dez anos.

Outra limitação fundamental da estrutura operatória concreta é o fato das composições entre operações acontecerem gradualmente e não mediante combinações quaisquer em virtude do caráter próprio dos agrupamentos característicos desse período. Assim, a síntese do número é constituída gradualmente, segundo uma aritmetização progressiva que permite primeiro a construção dos números naturais de 1 a 7; depois de 8 a 15; seguido de uma etapa de 16 a 30 etc. "Para além dessas fronteiras, cujo deslocamento é bastante lento, os números só comportarão ainda aspectos inclusivos (classes) ou seriais, antes de realizar-se a síntese dessas duas características" (PIAGET, 1990, p.39).

3.2.4.2 O segundo nível do estágio das operações "concretas"

Neste período, com início em torno dos 9-10 anos, a criança atinge o equilíbrio geral das operações concretas e inicia-se a transição para as operações formais.

Apesar de equilibradas e "generalizadas", o fato de serem "concretas" limita, muito o alcance das operações fazendo aparecer "lacunas" em determinados campos, como no da causalidade, com o sujeito percebendo um "conjunto de problemas de cinemática e dinâmica que ainda não se encontra em condições de resolver com os meios operatórios de que dispõe" (MONTOYA, 1996, p.53).

São esses desequilíbrios, em analogia com os estágios anteriores, que preparam para a constituição das estruturas ulteriores, pois possibilitam que as estruturas operatórias já construídas e estáveis se completem, construindo sobre sua base concreta as operações proposicionais, que são *operações sobre operações*. Em outras palavras, a criança não necessitaria mais do apoio concreto para desenvolver o seu pensamento e se torna capaz de racionar sob hipóteses.

Com relação às operações lógico-matemáticas, há um grande progresso na compreensão da intersecção de classes. Além disso, quando o sujeito, aos 7-8 anos, já é capaz de construir tabelas de dupla entrada (matrizes), envolvendo seriações duplas e classificações por dois critérios simultaneamente, ele o faz mais a partir de soluções empíricas bem sucedidas em relação a uma questão apresentada, do que mediante uma "utilização espontânea da estrutura". Aos 9-10 anos, ele já se torna capaz de colocar em correspondência séries ou classes, atestando "a eficácia de uma construção operatória" (PIAGET, 1990, p.40-41).

3.2.5 As operações formais

Em continuidade às conquistas realizadas no nível anterior, nesse período aparecem três novidades importantes, a *primeira* delas, é que a generalização das operações e as "operações sobre operações", possibilitam a classificação de segunda potência (combinatória); a *segunda* novidade é que a combinatória permite às operações de classes e de séries, que até então se encontravam limitadas pela estrutura de "agrupamento", se completem mediante as operações proposicionais recém constituídas. Finalmente, a *terceira* novidade, é a reunião, num mesmo sistema, das duas espécies distintas de reversibilidade (a inversão e a reciprocidade), que se encontravam completamente dissociadas.

Essa nova estrutura mental que tem duplo caráter (orgânico e construído) constitui um “grupo”, denominado por Piaget de grupo INRC[6], onde as inversões, que caracterizam os agrupamentos de classes e as reciprocidades, características dos agrupamentos seriais, “se sintetizam num sistema de conjunto, unindo essas transformações em um único todo” (MONTOYA, 1996, p.55).

O sujeito pode agora raciocinar por hipóteses e não necessita da presença (ou representação) dos objetos para operar, ou seja, os “objetos” agora, são proposições, com as operações efetuadas sendo de segunda potência.

É com as operações formais, cuja constituição se inicia em torno dos 11-12 anos, que as operações se libertam da duração temporal, do contexto psicológico das ações do sujeito ou, ainda, da dimensão causal, para atingir o “caráter extemporâneo que é próprio das ligações lógico-matemáticas depuradas” (PIAGET, 1990, p.45).

A *libertação* das estruturas operatórias da duração se efetiva mediante um processo constituído de *três* grandes etapas. A *primeira* se dá por volta de 1 ano e meio ou 2 anos, com a constituição da função semiótica que, mediante a interiorização da imitação em imagens e a aquisição da linguagem, permite que ações sucessivas possam ser simultaneamente representadas.

A *segunda* etapa se dá com o início das operações concretas que permitem uma reversibilidade capaz de refazer o curso do tempo e de assegurar a conservação dos pontos de partida. Esta mobilidade em relação à duração permanece, todavia, ligada às ações e manipulações, pois as operações continuam concretas e, portanto, envolvendo objetos e transformações reais.

A *terceira* etapa do processo de *libertação* da duração se inicia no presente estágio e é a constituição das operações formais.

---

[6] I, de identidade; N de elemento neutro; R e C, indicando os dois tipos possíveis de reversibilidade: a inversão e a recíproca.

Nessa etapa, o conhecimento supera o real e as transformações são possíveis e não apenas reais como quando das operações concretas. Ao inserir-se no possível, o conhecimento o liga diretamente ao necessário, sem a mediação do conceito. É o caso, por exemplo, da construção da seqüência infinita dos números inteiros, que é "conhecida" sem a necessidade de que cada componente seja "conhecido" individualmente.

> É esse poder de formar operações sobre operações que permite ao conhecimento ultrapassar o real e que lhe abre o caminho indefinido dos possíveis por meio da combinatória, libertando-se então das construções graduais a que continuam submetidas às operações concretas. Com efeito, as combinações n a n constituem uma classificação de todas as classificações possíveis, etc. (PIAGET, 1990, p.46)

Uma outra característica fundamental desse período é que as operações formais definem uma estrutura de "grupo", em contrapartida ao agrupamento das operações concretas. O sujeito não tem consciência desse grupo enquanto conhece, entretanto, é o modelo que retrata o que o sujeito é capaz de fazer, "todas as vezes que diferencia uma inversão e uma reciprocidade para compô-las entre si". (MONTOYA, 1996, p.54)

No domínio das operações concretas existem duas formas de reversibilidade indissociáveis: a *inversão* ou negação, que culmina na anulação do termo (que em matemática seria classificada como "existência do elemento oposto" ou, simbolicamente: +A - A = 0), e a *reciprocidade*, (que em matemática seria classificada como "propriedade simétrica", ou seja, se A=B, então B=A), que redunda numa equivalência e, portanto, numa supressão de diferenças. No grupo matemático, é necessário que +A - A = 0 + - A + A, ou seja, acontece a união das inversões e reciprocidades.

Ora, no âmbito psicológico a inversão caracteriza os agrupamentos de classes e a reciprocidade caracteriza os de relações, não sendo possível, ao nível das operações concretas (por envolverem objetos e transformações reais), um conjunto que ligue essas transformações num todo único. Isto não acontece quando se trata da combinatória proposicional[7].

---

[7] A combinatória proposicional se refere às 16 operações resultantes de combinações p e q, e de suas negações, conforme a lógica das classes e das relações. Quando se trata de classes, a negação significa o seu complementar.

Este último nível apresenta uma continuidade com tudo o que é mostrado pela psicogênese dos conhecimentos, a partir das indiferenciações iniciais do sensório-motor. O mundo físico, o real, em suas dimensões espaço-temporal do qual o sujeito é parte integrante, começa a ser entendido conforme as operações lógico-matemáticas vão se interiorizando (graças à abstração reflexiva) e possibilitam a construção de operações sobre operações que culminam com a conquista da extemporaneidade das transformações possíveis.

Nas palavras de Piaget:

> Ou seja, o duplo movimento de interiorização e exteriorização iniciado com o nascimento acaba por assegurar essa harmonia paradoxal entre um pensamento que se liberta, enfim, da ação material e de um universo que engloba esta última mas a supera de todas as formas. (PIAGET, 1990, p.51)

A matemática, com sua constituição dedutiva, é um exemplo surpreendente dessa convergência entre a dedução e a experiência, pois ela não só se adapta ao real, mas, às vezes, se antecipa às próprias descobertas físicas. Um bom exemplo dessa situação é o caso das geometrias não-euclidianas, que tiveram origem num problema interno da matemática, foram construídas dedutivamente e, posteriormente, possibilitaram o estabelecimento da teoria da relatividade por Albert Einstein.

A psicogênese dos conhecimentos mostra que isto não é prerrogativa dos altos níveis de pensamentos matemáticos, ao contrário, em níveis matemáticos bem mais inferiores, a inteligência, ainda em estado muito qualitativo, consegue realizar "correspondências análogas entre suas tentativas de abstração e seus esforços de observação, por pouco metódicos que sejam" (PIAGET, 1990, p.51).

3.3 O que é o número: uma investigação genética

Como já foi mencionado na introdução deste capítulo as primeiras pesquisas específicas de Piaget acerca da construção do conceito do número resultaram no livro, publicado em 1941, *A Gênese do número na criança*, não se encerrando, porém nesta obra.

Durante anos o assunto foi objeto de estudos no Centro Internacional de Epistemologia Genética, particularmente na década de 60 e foram traduzidos em três obras específicas dos "*Estudes d'Epistemologie Génétique*", volumes XI, XIII e XIV, com as participações de P. Gréco; J. B. Grize; S. Papert; A Morf e E. Beth, entre outros.

O próprio Piaget retomou e aprofundou a questão nos seus *Introduction à Epistemologie Genétique - I - La pensée mathematique* (1950) e *Psychologie et Epistémologie* (1970), entre outros. Os novos resultados apenas complementaram os trabalhos iniciais de Piaget e Szeminska, não os contestando em nada.

Como o objetivo aqui é mostrar que a construção do número não se dá de forma linear e que isso já estava claro no primeiro trabalho de Piaget acerca do número, o livro *A gênese do número na criança* é o nosso alicerce.

Os sujeitos das provas aplicadas por Piaget e Szeminska, estão limitados ao período intuitivo e a razão para isto é que a análise genética (e mesmo a axiomática) não pode remeter-se a um ponto de partida absoluto. Para evitar este problema a axiomática lança mão dos axiomas e a psicogênese estabelece um limite de retorno.

Para decidir quais as provas a serem aplicadas Piaget e Szeminska recorreram às "quatro qualidades" ou às "quatro necessidades" do número para existir, quais sejam: a *conservação das quantidades*, a *correspondência termo-a-termo* (essencial para a contagem), a determinação do *valor cardinal* e do *princípio ordinal* (os dois aspectos do número) e, assim, as experiências realizadas objetivavam mostrar como a criança constrói cada uma destas "qualidades".

3.3.1 A CONSERVAÇÃO (CONSTRUÇÃO) DAS QUANTIDADES

A conservação de quantidades é fundamental para o conceito de número, pois este só é compreendido na medida em que permanece idêntico a si mesmo independentemente da disposição das unidades das quais é composto. A isso chamamos de "invariância" do número (PIAGET; SZEMINSKA, 1981).

Como se trata de verificar a "invariância" do número, as quantidades são sempre apresentadas aos pares para os sujeitos, pois é preciso verificar se o número permanece idêntico a si mesmo, ao se mudar as configurações.

A questão que Piaget e Szeminska colocam em relação à conservação é verificar qual a relação entre esta e as noções aritméticas:

> [...] as noções aritméticas se estruturam progressivamente em função mesmo dessas exigências de conservação ou será a conservação anterior a toda organização numerativa e mesmo quantificante? (PIAGET; SZEMINSKA, 1981,. p.24)

Para certificar-se da generalidade das conclusões referentes às quantidades descontínuas (de ordem aritmética), os pesquisadores trataram, também, simultaneamente das quantidades contínuas (de ordem espacial).

No caso das quantidades contínuas, as provas[8] realizadas foram as de transvasamento do líquido e para as quantidades descontínuas, a de colocação de contas em dois recipientes, com a avaliação dos comprimentos de colares formados pela justaposição de contas. As fases encontradas são comuns às duas situações e iniciam com uma ausência de conservação, passam por uma segunda fase, onde há um início de constituição de conservação e finalmente a última fase, a da conservação e coordenação quantificante.

A conservação das quantidades é, portanto, construída progressivamente segundo um processo intelectual complexo, pois conservar quantidades significa, em última instancia, acreditar que necessariamente a quantidade se conserva mesmo contrariando as informações dadas pela percepção imediata.

A) **Conservação de quantidades contínuas**

A criança da *primeira* fase para emitir seu julgamento se fixa no tamanho do recipiente; ora na altura do líquido ou ainda no número de vidros, mas, por não conceber a quantidade como uma totalidade, raciocina sobre uma relação de cada vez, sem coordenação entre elas. Assim, este sujeito não possui conservação em função da incapacidade de coordenar as relações quantitativas em jogo nas percepções.

[8] Para melhor compreensão é fundamental a leitura do livro *A gênese do número na criança* no qual estão descritas as provas realizadas. Aqui, apenas são comentados e, eventualmente, explicitados os resultados.

O interessante é que, mesmo sem conservação, os julgamentos nesta fase já são quantificados, mas mediante uma *quantificação bruta* unidimensional. Em sua forma elementar, a quantidade junto com a qualidade (as justificativas apresentadas pelas crianças são do tipo: tem menos (líquido) amarelo porque é mais baixo (a altura do líquido), ou há mais vermelho porque é mais alto). Os julgamentos se fundamentam "numa relação perceptiva de diferença entre duas qualidades" (as alturas dos líquidos) (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.32).

A quantificação sistemática se origina desta "quantificação bruta" mediante um processo que é interdependente com a evolução das relações. Assim que as relações deixam de ser meramente perceptivas e se tornam relações "verdadeiras" com o aparecimento da transitividade lógica (ou a consciência da não-transitividade), estas relações engendram sistemas de quantidades intensivas (lógicas, permitem comparar parte e todo), que depois evoluem para quantidades extensivas (é possível a comparação entre as partes de um todo, mas ainda não existe a unidade), para quantidades extensivas métricas e, finalmente, o número.

> Em conclusão, se os sujeitos deste primeiro nível não compreendem a conservação de quantidade, é que eles não chegaram a construir a noção da própria quantidade, no sentido de quantidade total, e se a isso não chegam é por não poderem compor as relações ou as partes em jogo, pois seu espírito não ultrapassa o nível das qualidades ou das quantidades brutas. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.36)

Já no início do relato das pesquisas de Piaget e Szeminska é possível perceber a solidariedade existente entre número, classe e seriação, pois, antes mesmo que as relações perceptivas se tornem relações verdadeiras (simétricas e assimétricas), existe uma quantificação incipiente evidenciando que as três estruturas estão num mesmo estágio de construção.

A *segunda* fase da construção da conservação é considerada intermediária entre as "reações das crianças que não atingem a noção da conservação das quantidades simultaneamente física e lógica", sem que todas as crianças passem efetivamente por ela (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.36).

Essas reações intermediárias mostram que a noção de conservação tem sua gênese numa quantificação propriamente dita e originária da coordenação progressiva das relações em jogo, pois evidenciam que os sujeitos procuram coordenar duas ou mais relações ao mesmo tempo, porém, "oscilam infindavelmente entre esta tentativa de coordenação e a submissão às ilusões perceptivas". (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.38)

Além disso, as próprias relações estão se constituindo enquanto tais e caminham em direção à sua transitividade lógica que só acontece quando elas se tornam componíveis entre si, aditiva e multiplicativamente.

"A adição das relações assimétricas é sua seriação em ato ou pensamento" e a multiplicação é a "sua seriação do ponto de vista de várias relações ao mesmo tempo", como, por exemplo, comparar duas quantidades segundo a altura, a largura, o número de vidros, etc., tudo ao mesmo tempo (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.33).

Ao se constituírem enquanto relações, estas engendram a quantificação inclusiva, porém, para que esta quantificação se torne extensiva ainda há uma segunda condição a preencher: a partição em unidades iguais ou a decomposição em dimensões proporcionais (é mais largo, porém mais baixo etc.).

Ao alcançar a conservação, a criança a afirma de forma simples e evidente; sem fazer menção nem à multiplicação das relações ou a qualquer partição. Este fato poderia sugerir que a conservação "aparece" do nada e não como conseqüência de coordenações prévias das relações. Tal não ocorre e os indivíduos da segunda fase colaboram enormemente, com suas oscilações para que se possa fazer a afirmação em questão.

O caminho percorrido então é: inicialmente a criança avalia as quantidades de uma forma unidimensional, dependente das relações perceptuais, dando origem a uma *quantificação bruta*, a seguir, passa a coordenar as relações perceptuais entre si, construindo então uma totalidade multidimensional que lhe permite estabelecer um relacionamento da parte com o todo que é a *quantificação intensiva*. Como a multiplicação lógica é insuficiente para uma *quantificação extensiva* esta só vai ocorrer com a composição por partição ou a decomposição em dimensões proporcionais.

A *decomposição em dimensões proporcionais* pressupõe um processo sincrônico, porém distinto do que culmina com a multiplicação das relações. Este processo é extremamente importante, pois nele intervém a noção de proporção propriamente dita, que permite estabelecer a igualização das diferenças[9] , existindo uma combinação entre as relações assimétricas de diferença, com as simétricas de igualdade o "que constitui a passagem da quantidade intensiva para a quantidade extensiva e explica a aritmetização da multiplicação lógica" (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.47).

Na verdade a proporção que se estabelece já constitui, de certa forma, uma partição pois para igualizar uma diferença é preciso, não só conceber a quantidade em questão "como uma totalidade qualitativa que muda de valor a cada deformação" mas, também, "estruturá-la como soma decomponível em unidades". (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.48)

> O critério a empregar é o seguinte: existe partição aritmética desde que os elementos de um todo possam ser igualados entre si embora sendo distintos, enquanto que quando uma relação de conjunto ou uma classe são decompostas em sub-relações ou sub-classes, suas reuniões não implicam nenhuma igualdade entre si, mas apenas a sua co-inclusão no todo. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.47)

Para se chegar à partição propriamente numérica se faz necessário, ainda, compreender que uma metade não é apenas uma unidade igual à outra unidade que, reunidas, constituem um todo, mas, também, que cada metade é a diferença entre o todo e a outra metade. Assim, a partição numérica, a qual além de sincrônica é também complementar ao surgimento das proporções, é também, uma igualização de diferenças como a proporção, só que ao considerar $A = B_1 + B_2$, as duas metades B_1 e B_2 são iguais, enquanto que na proporção o que se iguala são apenas diferenças, para realizar compensações.

> Vê-se assim, em conclusão, quão simples é no fundo o processo de quantificação de que dá testemunho a descoberta da conservação das quantidades pela criança. O sujeito começa por não considerar mais que relações perceptivas não coordenadas entre si de igualdade ou de

[9] Por exemplo, quando o sujeito afirma que duas quantidades são iguais, mesmo acondicionadas em recipientes diferentes, porque um é menos largo e mais alto do que o outro e, portanto, o que perde em largura, ganha em altura.

> diferença qualitativas, constituindo assim respectivamente as qualidades e as quantidades brutas, não componíveis como tais. Depois, no decorrer da segunda fase, inicia um processo de coordenação lógica que se conclui na terceira fase e que resulta na classificação das igualdades e na seriação das diferenças (aditiva e multiplicativamente), com esta seriação levando à constituição das quantidades intensivas. Por fim, a terceira fase é assinalada pela constituição das quantidades extensivas, graças à igualização das diferenças intensivas e, conseqüentemente, à aritmetização dos agrupamentos lógicos. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.50)

B) **CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADES DISCRETAS**

Para a análise da conservação das quantidades descontínuas ou discretas (de ordem aritmética) foram realizadas provas análogas às anteriores de modo a permitir a criança "avaliá-las globalmente, quando seus elementos se acham acumulados, ou a enumerá-los, quando se encontram dissociados". (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.51)

O material escolhido foi *contas de madeira* cujas coleções quando contidas em recipientes proporcionam avaliações similares às efetivadas com os líquidos, além de serem passíveis de um outro tipo de avaliação global: o comprimento dos colares construídos pela justaposição de contas. A estimativa do comprimento dos colares contribui para controlar a quantificação das contas contidas nos diversos recipientes utilizados.

Ao se apresentarem dissociadas as contas podem ser consideradas uma-a-uma e serem submetidas a operações de correspondência biunívoca (quando experimentador e criança enchem seus respectivos recipientes da seguinte forma: o experimentador coloca uma conta, e a criança deposita também uma unidade no seu vidro e, assim, sucessivamente).

Os autores ressaltam que a análise das conservações das quantidades discretas, além de proporcionarem o controle dos resultados obtidos quando das experiências com as quantidades contínuas, permite estudar também as relações existentes entre a conservação das quantidades e o desenvolvimento da correspondência biunívoca e recíproca.

O estudo da correspondência biunívoca se faz necessário por que ela constitui uma das fontes do próprio número. As provas realizadas objetivavam verificar não apenas o desenvolvimento da correspondência termo a termo, mas, também, por que razão esta forma de correspondência garante (às crianças da terceira fase), a equivalência entre duas coleções. São encontradas aqui as mesmas três fases: ausência, intermediária e conservação.

Na *primeira* fase a criança não apenas acredita que a quantidade muda quando se despeja as contas de um recipiente em outro de forma diferente como também acredita que os comprimentos dos colares confeccionados com as contas de cada recipiente são diferentes, evidenciando a não-conservação do ponto de vista matemático.

De fato, nem mesmo o fato de se colocar uma conta num recipiente pelo examinador e a criança repetir a ação num recipiente paralelo, estabelecendo uma correspondência biunívoca e recíproca, numa espécie de enumeração prática, possibilita que o sujeito perceba a equivalência das quantidades.

A razão principal desta não-conservação (que constitui o equivalente da não-conservação dos objetos no sensório-motor) é a irreversibilidade das ações em jogo. A criança não é capaz de reunir e dissociar mentalmente, de forma reversível, pois, como os sujeitos estão enquadrados no nível do pensamento intuitivo, a representação que possuem se constitui apenas na evocação pela palavra ou pela imagem das diversas ações reais numa forma ainda quase material.

Enfim, para as crianças da primeira fase, tanto a correspondência termo a termo quanto a enumeração não são considerados como processos de quantificação seguros e estas preferem a avaliação direta proporcionada pelas relações perceptivas globais.

Da mesma forma que no caso das quantidades contínuas, a *segunda* fase neste contexto se caracteriza pelas soluções situadas a meio caminho entre a quantidade bruta e a quantificação propriamente dita.

A criança acredita na conservação porque a igualdade inicial foi estabelecida mediante uma correspondência biunívoca e recíproca, porém, as aparências contrastantes das coleções (recipientes de dimensões diferentes) desencadeiam um conflito, que é, inicialmente, verdadeiro, uma vez que os argumentos para a conservação não são derrubados imediatamente pelas alterações perceptuais ocorridas. É mediante essa luta então desencadeada entre a igualdade inicial e desigualdade percebida que as relações perceptivas se coordenam e se integram num sistema capaz de, ao mesmo tempo, explicar as variações concomitantes e justificar a conservação.

A coordenação das relações em jogo é iniciada mediante uma multiplicação simplesmente lógica que se prolonga a seguir, numa proporção e a criança resolve o conflito efetuando a síntese entre as variações aparentes e a equivalência real.

Como o processo que leva a conservação de quantidades é o mesmo que possibilita a própria construção da quantidade, a *terceira* fase, a da conservação é, também, a fase na qual se concluem as quantificações intensiva e extensiva, esboçadas na segunda fase, com a multiplicação das relações.

Para analisar as coordenações das relações em jogo os pesquisadores modificaram um pouco a técnica das provas: foram apresentadas à criança duas coleções com formas diferentes, sem que ela tivesse se certificado previamente de sua igualdade e lhe indagavam acerca da equivalência entre as duas coleções. Uma vez formulada a hipótese de igualdade ou não, se estabelecia uma correspondência termo a termo, com explicação retrospectiva.

Como nesta fase a criança já é capaz de multiplicar relações ela utiliza este recurso para formular sua hipótese, estabelecendo a igualdade das coleções de contas colocadas em recipientes diferentes, mediante a multiplicação lógica das relações em jogo de altura e largura. Esta operação, porém, não basta para constituir a noção de igualdade entre as duas quantidades, o que só ocorreria se as relações de altura e largura fossem permutadas.

O que é preciso ressaltar, todavia é que:

> [...] logo que coordenadas operatoriamente, as diferenças percebidas são medidas e na falta de dados numéricos são medidas umas pelas outras, com todo aumento de largura sendo igualado ou comparado com a diminuição concomitante de altura, ou o inverso. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p. 65)

As igualizações de diferenças e partições numéricas constituem-se em função de ações que se tornaram reversíveis em pensamento (quando a criança "esvazia" mentalmente um dos recipientes e "completa" o outro para estabelecer a igualdade, por exemplo). Essa proporção constitui o início da quantificação extensiva.

Em resumo: na primeira fase as relações perceptivas se sobrepõem à equivalência das coleções respectivamente construídas; na fase intermediária, há um conflito sem solução e na terceira, a equivalência antecede (e se sobrepõe) às relações perceptivas devido à coordenação entre estas últimas. Abordaremos a seguir as razões para a correspondência termo a termo ser suficiente para garantir a equivalência das coleções na terceira fase, não o sendo nas anteriores.

3.3.2 A CORRESPONDÊNCIA TERMO A TERMO

Na comparação de duas quantidades duas ações são normalmente utilizadas: por em proporção suas dimensões e colocar em correspondência termo a termo seus elementos.

A correspondência entre os termos de duas coleções, aparece como constitutiva do número inteiro, desde os primórdios da contagem na humanidade, até a equivalência entre conjuntos estabelecida por Cantor.

Todavia, ela não é suficiente para garantir a equivalência entre duas relações de imediato, havendo uma "evolução da correspondência como tal, da simples correspondência global das figuras de conjunto, a qual antecipa unicamente a quantificação destas últimas, à correspondência realmente quantificante" que é fonte de equivalência necessária e da invariância cardinal (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.71).

Do ponto de vista psicológico e não lógico a criança pratica a correspondência termo a termo em duas espécies diferentes de situações: a primeira, que se refere à cardinação é quando a criança é levada a construir uma segunda quantidade equivalente a uma dada (por exemplo, colocar o mesmo número de bolinhas de gude que o companheiro; ou indicar com os dedos determinada quantidade de objetos) e uma correspondência mais simples, que é a estabelecida entre objetos heterogêneos, porém qualitativamente complementares, como entre canetas e tampas; garrafas e copos; xícaras e pires, etc., isto é, uma correspondência provocada pelas condições exteriores.

As correspondências provocadas são estudadas a seguir, com o objetivo de "'estabelecer se a correspondência termo a termo operada pela criança ou efetuada com ela acarreta necessariamente em seu espírito a idéia de uma equivalência durável entre os conjuntos correspondentes (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.72).

As provas selecionadas pelos pesquisadores obedecem a uma ordem de generalidade decrescente e são: correspondência termo a termo entre "n" copos e "n" garrafas; correspondência entre flores e jarras ou entre ovos e oveiros e a troca um contra um entre moedas e mercadorias, com ou sem numeração falada.

A correspondência entre copos e garrafas é mais geral que entre flores e jarras pois as flores são colocadas dentro das jarras e não apenas ao lado. A correspondência entre ovos e oveiros é mais simples ainda, porque em cada oveiro cabe um único ovo, enquanto que nas jarras podem ser colocadas mais flores, ou mais copos ao lado de uma única garrafa.

A última prova é a que estabelece mais a correspondência "em ação", pois se trata de "troca um a um", primeiramente sem numeração falada e depois fazendo uso da numeração.

É importante observar que se as crianças evidenciassem a conservação na prova das garrafas (mais geral), não seria submetida às seguintes e assim sucessivamente.

Na correspondência entre 6 garrafas e um número maior de copos os resultados são classificados em três fases: ausência de correspondência termo a termo e de equivalência; correspondência termo a termo, mas ausência de equivalência durável e, correspondência com equivalência durável.

Na *primeira* fase, as crianças procedem por correspondência global, determinada pela percepção do comprimento das fileiras, que varia segundo o espaço que intercala os objetos. As crianças da *segunda* fase já estabelecem de início a correspondência, porém se os elementos de uma das coleções são espaçados ou aproximados mantendo-se a outra constante, a equivalência entre as duas fileiras deixa de existir.

> Tudo se passa como se, para esta última, a quantidade dependesse menos do número (noção que, nesta hipótese, permaneceria portanto, verbal, mesmo quando o sujeito conta corretamente) ou da correspondência termo a termo entre objetos discretos que do aspecto global da coleção e, em particular, do espaço ocupado pela série. (PIAGET; SZEMINSKA. 1981, p.76)

Na *terceira* fase, assim que as crianças estabelecem a correspondência biunívoca entre conjuntos, a equivalência entre eles permanece inalterada independentemente de qualquer alteração visual o que demonstra que, nas fases anteriores, a criança acreditava que o número variava com a figura e não era constituído pela correspondência termo a termo.

A correspondência evolui de uma comparação global de conjuntos por simples avaliação espacial a uma correspondência unívoca e recíproca com equivalência durável entre as correspondentes coleções, passando por uma fase intermediária. Esta fase intermediária estabelece a continuidade entre elas, em que a equivalência entre os dois conjuntos é manifestada por uma correspondência intuitiva, de ordem perceptiva e, conseqüentemente, não durável.

> A única maneira de interpretar a coisa é, portanto, admitir uma espécie de indiferenciação entre o número e o espaço ocupado, isto é, repetimos, uma avaliação global e não ainda analítica, a única avaliação que se acha à disposição da criança sendo a correspondência visual ou de ordem perceptiva. (PIAGET; SZEMINSKA. 1981, p.80)
>
> A prova da correspondência entre flores e jarras e entre os ovos e oveiros foi então estipulada de forma a suprimir esta indiferenciação entre número e espaço. 'É claro que quanto mais a coesão dos objetos que se correspondem termo a termo é grande, tanto mais a equivalência das coleções correspondentes será durável'. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.80)

Ao depositar a flor numa jarra, tem-se o conteúdo introduzido no continente, o que é mais complementar ainda do que o copo em relação à garrafa. Desta forma, é mais fácil compreender que a quantidade de flores ou de ovos permanece equivalente à das jarras ou dos oveiros, mesmo quando foram retirados destes.

Da mesma forma que em todas as experiências até aqui descritas, os resultados classificam-se em três fases: a da comparação global sem correspondência termo a termo nem equivalência durável, uma fase intermediária na qual existe a correspondência um a um, porém sem equivalência durável e, finalmente, correspondência operatória com equivalência durável.

Durante as primeiras fases, as relações perceptuais só permitem uma quantificação unidimensional (maior, menor, comprido, pequeno, apertado, etc.), que não são coordenadas ou multiplicadas entre si.

No nível seguinte, a criança coordena intuitivamente as relações e efetua a correspondência dos elementos dispostos um defronte ao outro, estabelecendo a equivalência. Porém a equivalência entre as coleções se altera de acordo com as transformações das configurações, porque o sujeito ainda não é capaz de igualizar as diferenças. Na terceira e última fase, opera-se a multiplicação reversível das relações em jogo e isso graças à descoberta pela criança de que toda alteração espacial na configuração dos elementos pode ser desfeita mediante uma operação inversa.

> Vê-se assim como o primado da operação em relação à intuição perceptiva resulta da reversibilidade progressiva do pensamento: a percepção é, por essência, irreversível, mas, à medida que ela se resolve em juízos de relação, as operações reversíveis são capazes de dominá-la e de substituir a correspondência intuitiva por uma correspondência operatória e quantificante, assegurando, contrariamente às aparências da percepção imediata a equivalência necessária e durável das coleções correspondentes. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981. p.89)

As provas até então realizadas dão conta de uma correspondência estática de objetos complementares, justapostos ou encaixados. A troca de um contra um, por outro lado, representa uma correspondência dinâmica e exige provas específicas.

Todas as crianças examinadas já trocam naturalmente suas moedas uma a uma pelos objetos propostos (flores, bombons, etc.). Inicialmente solicita-se à criança para estimar quantos objetos poderá adquirir com determinada quantia de moedas, com o intuito de verificar qual dos três métodos possíveis (comparação global, comparação termo a termo ou a numeração) a criança utilizará. A seguir é realizada a troca dos objetos um contra um, para verificar junto ao sujeito se existe (ou não) equivalência entre as duas coleções (moedas e objetos adquiridos).

Na *primeira* fase, as crianças utilizam a comparação global para a previsão e demonstram ausência de equivalência após a troca de um contra um.

A *segunda* fase já apresenta uma estimativa correta por correspondência visual, todavia, mesmo com a confirmação correta da previsão inicial pela troca um a um, o sujeito não atinge uma equivalência durável e isso mesmo quando utiliza a numeração.

Assim, a criança admite, após contagem, que as duas coleções têm o mesmo número de elementos (8, por exemplo), entretanto, nega a equivalência, levando em conta a percepção das qualidades espaciais. Os sujeitos desta fase negam também a possibilidade de retorno à situação inicial (de correspondência entre as coleções de moedas e objetos).

Da mesma forma que nas provas envolvendo conteúdo e continente, as de troca de um contra um, também apresentam, para alguns sujeitos, uma passagem entre a segunda e a terceira fase, que evidenciam o processo de construção da equivalência.

Para os sujeitos da terceira fase, existe uma equivalência, inicialmente momentânea e depois durável que, para tornar-se evidente e logicamente necessária, pressupõe um sistema reversível de deslocamentos ou de relações, com a própria troca sendo concebida como o esgotamento das duas coleções.

Para finalizar a análise das correspondências provocadas resta estudar a troca um contra um, com numeração. Os resultados obtidos apresentam-se idênticos aos das provas anteriores e a numeração falada não altera em nada as fases encontradas com as outras técnicas.

A numeração falada não interfere na evolução da correspondência e da equivalência, o que não significa, todavia, que a contagem não seja importante, ao contrário "no momento em que a correspondência se torna quantificante e dá assim nascimento ao processo de equivalência, a numeração falada pode acelerar o processo de evolução" (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.97).

3.3.3 A DETERMINAÇÃO DO VALOR CARDINAL DO NÚMERO

O estudo das correspondências provocadas mostrou que estas podem ser de diferentes tipos e evoluem, desde a correspondência global (correspondência intuitiva) até a correspondência quantificante (operatória) que possibilita a noção de equivalência durável e necessária dos conjuntos correspondentes. O objetivo agora é analisar o mecanismo da correspondência em si e não mais os seus resultados. Para isso foram selecionadas situações nas quais a criança "é obrigada a inventar por si só a correspondência e utilizá-la sobre a forma que lhe convém", em outras palavras, verificar como a criança faz para avaliar o valor cardinal de uma dada coleção, quais os tipos de correspondência que ela usa e, também, "quais os métodos que precedem a correspondência termo a termo ou a sucedem imediatamente" (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.99).

No presente caso não era apresentado criança duas coleções para que fossem comparadas, pois o objetivo era verificar a capacidade da criança de construir uma coleção equivalente a uma dada de antemão e identificar o procedimento escolhido (correspondência qualitativa ou qualquer).

As coleções apresentadas às crianças eram constituídas por figuras construídas com fichas, de formas variadas (aglomerados, séries ou figuras abertas, fechadas quaisquer, fechadas de formas conhecidas ou não e configurações numéricas).

Numa *primeira* fase, por não possuírem ainda noções precisas do número cardinal, as crianças limitam-se a uma comparação qualitativa para quantificar as coleções dadas, quantificação esta expressa em termos de mais, menos e igual.

A princípio, as reações desta primeira fase parecem indicar que essas crianças preocupam-se apenas com a semelhança qualitativa, não experimentando nenhuma necessidade de uma avaliação quantitativa quando da reprodução das figuras-modelo. Como, entretanto, existe uma avaliação em termos de "mais", "menos" ou "igual", mesmo que fundada sobre as qualidades globais consideradas e sem coordenar as comparações entre si, já aparece nessa primeira fase, uma quantificação bruta (sem multiplicação de relações, pois, se leva em conta o comprimento, despreza a densidade, por exemplo).

O caráter puramente perceptivo das reações das crianças desta fase evidencia sua irreversibilidade e o fato das relações serem comparáveis entre si indica que elas não constituem ainda operações propriamente ditas.

Já foi destacada anteriormente a diferença entre correspondência qualitativa e qualquer (numérica); também foram usadas expressões como correspondência intuitiva, para indicar as correspondências fundadas unicamente na percepção ou imagens representativas e, também, da expressão correspondência operatória, para designar a correspondência independente da percepção atual e, portanto, de ordem intelectual e reversível.

Uma correspondência qualitativa pode ser intuitiva (quando estabelecida entre figuras semelhantes) ou operatória (entre figuras diferentes). A correspondência numérica é necessariamente operatória, exceção feita aos quatro primeiros números, considerados como números perceptuais.

É exatamente esta diferenciação entre os tipos de correspondência que permite identificar os sujeitos que se encontram na segunda ou na terceira fase em relação à técnica de reprodução de figuras. Os sujeitos que se situam na segunda fase, apresentam uma correspondência qualitativa de ordem intuitiva, enquanto que os da terceira deixam transparecer uma correspondência operatória (qualitativa e numérica).

Na *segunda* fase já se constata a presença de correspondência termo a termo, porém sem que exista equivalência entre as duas coleções, pois o sujeito se apóia, sem cessar, nas particularidades qualitativas das figuras. Durante a *terceira* fase, ao contrário, a correspondência se liberta da figura intuitiva e torna-se operatória, qualitativa ou numericamente, em função do surgimento das operações espontâneas de controle, por dissociações das totalidades e colocações em série.

Em outras palavras, a criança desfaz as figuras e arranja linearmente as fichas de forma a estabelecer a correspondência termo a termo para garantir a equivalência, independentemente de tê-las numerado.

> Existe, portanto, uma fase própria à correspondência operatória, com sentimento de equivalência (qualitativa e numérica) das coleções correspondentes e com conservação das quantidades. Esta fase vem assim

> intercalar-se entre a simples correspondência intuitiva e a correspondência entre os objetos e as cifras verbais, ou numeração falada. Quanto a esta última, cujo emprego correto a suplantar toda correspondência prática, caracterizaria uma quarta fase, [...] e é apenas quando as operações se constituem logicamente no plano prático que a numeração falada assume uma significação propriamente numérica. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.111)

3.3.4 A SÍNTESE

Embora tenham sido analisadas apenas três das "quatro qualidades" do número: a conservação, a correspondência e a cardinalidade, já é possível estabelecê-lo como síntese das classes e das séries, uma vez que a ordem em jogo é a vicariante, que não pressupõe o ordinal (que é imprescindível para a construção da sucessão numérica). Para isso, é oportuno destacar um resumo dos resultados até aqui obtidos e mostrar que estes são suficientes para estabelecer o número como síntese das classes e das séries.

- Tanto as quantidades contínuas como as descontínuas não se conservam de saída para a criança. Esta conservação só é estabelecida com a coordenação das relações em jogo, sendo a correspondência termo a termo a razão inicial da equivalência entre duas coleções;

- em função do exposto em (i), tornou-se importante verificar porque a correspondência termo a termo não é suficiente para assegurar a equivalência de duas coleções, mesmo quando tal correspondência está sob suas formas mais familiares como a entre conteúdos e continentes ou, a troca de um contra um. Constatou-se então, que existe um nível de correspondência perceptiva no qual a equivalência estabelecida é rompida sempre que se desfaz o contato entre os elementos correspondentes, indicando uma equivalência definida por meio das relações globais de espaço ocupado ou de dimensões imediatamente percebidas. Após esta fase, a correspondência sem equivalência durável e a correspondência numérica com equivalência necessária se sucedem, segundo uma ordem regular, o que em outros termos quer dizer: comparação qualitativa global; comparação qualitativa intuitiva e correspondência numérica e, respectivamente, quantificação bruta (mais, menos, igual); quantificação intensiva (um, todos, nenhum, alguns), quantificação extensiva não métrica (quase todos, meio e metade) e a quantificação extensiva métrica (contagem e medida). Esta evolução pode ser analisada tanto do ponto de vista psicológico (de ordem causal e genética), quanto do ponto de vista da lógica das operações;

- a análise psicológica indica que, até por volta dos 4 anos e meio a 5 anos, a criança avalia as quantidades descontínuas ou coleções como se estas fossem grandezas espaciais, fundando seus julgamentos sobre as configurações espaciais (mais ou menos longo, apertado, etc.). Fica evidente que a criança não sente necessidade (sequer é capaz) de decompor as totalidades que percebe para fazer seus julgamentos. Isto significa que ela não considera ainda uma dada coleção como uma reunião de unidades do tipo 1+1+1+... etc. e, a única síntese ao alcance da criança da primeira fase se restringe à própria forma de conjunto como intuição percebida globalmente, sem que seja capaz de reunir partes desta intuição quando de um eventual rompimento. Assim, a criança não é capaz de perceber que mesmo quando a forma de conjunto muda e, conseqüentemente, a disposição das partes, o total dos elementos não se altera, revelando que o ponto de partida da evolução da correspondência é uma quase total irreversibilidade do pensamento;

- as condutas da segunda fase que se caracterizam pela correspondência qualitativa de ordem intuitiva e pela comparação de figuras apresentam uma melhor elaboração dos dados intuitivos em função de uma análise mais precisa de formas e qualidades. Contrariamente à fase anterior na qual a ênfase se encontra nos detalhes necessários para a reprodução das figuras modelos, como ângulos, posições extremas das figuras, etc., nessa fase, todas as partes da totalidade são analisadas e comparadas, sem que existam mais aglomerados. A criança considera diferentes critérios (comprimento, largura, densidade, etc.), provocando as hesitações e oscilações que conduzem à coordenação das relações em jogo. Há um progresso da análise e da síntese combinadas na reprodução das figuras que é representado pela correspondência qualitativa de ordem intuitiva, semi-operatória, que permite ao sujeito colocar em correspondência não apenas os pontos marcantes das figuras em conjunto, mas, também, as partes análogas. Acrescente-se ainda, como resultado inerente à segunda fase, o fato de que embora as crianças não confiem que o número de elementos de uma figura transformada seja equivalente ao da sua forma inicial elas sabem que é possível retornar à forma anterior, desfazendo-se as operações realizadas. Isto constitui um progresso também na reversibilidade do pensamento;

- com a realização de um progresso decisivo caracterizado pela correspondência com equivalência durável e necessária, as crianças alcançam a terceira fase e com ela a noção de que coleções correspondentes permanecem equivalentes independentemente de sua configuração ou da disposição dos elementos. Tal progresso é realizado continuamente, mediante a liberação gradativa da intuição perceptiva (figura), o que permite a transformação dos elementos em unidades permutáveis entre si, conseqüentemente, a correspondência vai também, gradativamente, deixando de ser intuitiva e passando a ser "qualquer" ou numérica. Essa libertação só acontece, todavia, com a compreensão de que toda transformação é passível de ser compensada pela transformação inversa, mediante incessantes recapitulações das correspondências termo a termo, que constitui a reversibilidade completa. Isso acontece porque a coordenação acabada das relações em jogo permite a descoberta da constância das coleções quanto à sua extensão e da igualização das diferenças, com os elementos se transformando em unidades, as totalidades se constituindo pela reunião das unidades que diferem entre si apenas pela sua posição na seriação. Em outras palavras, a correspondência se torna numérica, em função de uma combinação operatória (reversível) entre as coleções (classes) e as séries.

À evolução psicológica (da percepção global à operação) corresponde uma estruturação lógica dos julgamentos, progredindo de uma simples relação indecomponível, até a correspondência biunívoca e recíproca qualquer, por uma série de transformações lógico-aritméticas que serão analisadas a seguir.

Como já foi comentado, a cada espécie de correspondência construída pela criança, corresponde um dos tipos de quantificação. Assim, à avaliação global corresponde a quantificação bruta; à correspondência qualitativa intuitiva, a quantificação intensiva e à correspondência numérica, a quantificação extensiva.

No nível da quantificação bruta, não existe ainda a multiplicação entre relações e estas também não são decomponíveis em elementos que comporiam a soma, não comportando, portanto, nenhuma seriação aditiva. Na verdade, por não possuírem sequer a transitividade, as ligações presentes na quantificação bruta não são nem propriamente relações.

Ao se transformarem em relações propriamente ditas, estas relações engendram a quantificação intensiva que se caracteriza por uma seriação aditiva (o comprimento total da fileira **l** é dado pela soma dos comprimentos dos intervalos entre um elemento e o seguinte: **l = a+a'+b'+...)** e uma multiplicação das séries aditivas que é a própria correspondência qualitativa (dada uma fileira definida pela posição de cada elemento, ou seja, por **l** e pelos intervalos **l = a+a'+b'+...**, construir uma segunda fileira que reproduza exatamente os mesmos intervalos **a, a', b'**, ... e o mesmo comprimento **l**).

A nova fileira pode ser construída acima, abaixo ou ao lado da fileira dada e a correspondência qualitativa existe quando as fileiras são co-multiplicadas pela relação abaixo (acima, ao lado, etc.).

A mesma coisa pode ser expressa por meio de classes individuais ou compostas, definidas por suas qualidades intuitivas de ordem espacial (temporal), pelas posições respectivas dos elementos ou classes de elementos qualificados pelas posições.

Aparece, portanto, novamente a "combinação" entre classes e séries, porém, ainda, num plano intuitivo ou semi-operatório porque a criança não consegue deduzir a equivalência numérica durável das coleções correspondentes, partindo das operações realizadas.

Chamando de **l** o comprimento da fileira; de **d** a densidade (distância entre os elementos) e de **n**, a quantidade de elementos da fileira, se são dadas duas fileiras f_1 e f_2, as seguintes conclusões lógicas podem ser aferidas:

1) $(l_1 = l_2) \times (d_1 = d_2) = (n_1 = n_2)$ (correspondência qualitativa)

2) $(l_1 > l_2) \times (d_1 > d_2) = (n_1 > n_2)$ e $(l_1 < l_2) \times (d_1 < d_2) = (n_1 < n_2)$ (avaliação global)

3) $(l_1 = l_2) \times (d_1 > d_2) = (n_1 > n_2)$ e $(l_1 = l_2) \times (d_1 < d_2) = (n_1 < n_2)$ (avaliação global)

4) $(l_1 < l_2) \times (d_1 = d_2) = (n_1 < n_2)$ e $(l_1 > l_2) \times (d_1 = d_2) = (n_1 > n_2)$ (avaliação global)

5) $(l_1 > l_2) \times (d_1 < d_2) = (n_1 > n_2)$ ou $(n_1 < n_2)$ ou $(n_1 = n_2)$ e

$(l_1 < l_2) \times (d_1 > d_2) = (n_1 < n_2)$ ou $(n_1 > n_2)$ ou $(n_1 = n_2)$ ou, de outra forma:

6) $(n_1 = n_2) \times (l_1 > l_2) = (d_1 < d_2)$ e $(n_1 = n_2) \times (l_1 < l_2) = (d_1 > d_2)$ ou

6A) $(n_1 = n_2) \times (d_1 > d_2) = (l_1 < l_2)$ e $(n_1 = n_2) \times (d_1 < d_2) = (l_1 > l_2)$.

É interessante observar que as crianças da segunda fase compreendem perfeitamente as quatro primeiras relações, mas não percebem as três últimas que estabelecem a existência da igualdade numérica quando variam o comprimento e a densidade ao mesmo tempo.

Na verdade isto só vai ocorrer com a compreensão da relação inversa entre **d** e **l** (compensação), o que acontecerá apenas quando a criança ultrapassar os limites da intuição perceptiva. Para descobrir a constância de **n** (e a quantificação extensiva) é necessária a descoberta da constância das classes em extensão e das séries de relações. E, de novo, a combinação entre classes e séries para engendrar a quantificação extensiva e, conseqüentemente, o número.

Quando um sujeito reproduz exatamente, usando fichas vermelhas, uma figura formada por fichas azuis dada como modelo, o que foi estabelecido entre as duas figuras foi uma correspondência qualitativa. Se o sujeito não reproduz a figura, mas dispõe linearmente as fichas vermelhas, ou empilha a quantidade exata, certamente haverá ainda uma correspondência termo a termo, só que, qualquer, pois cada ficha não é mais considerada em função da sua qualidade (posição ocupada), mas, sim, como uma unidade igual às outras.

Seja a figura $D_1 = A_1+A_1'+B_1'+C_1'$ formada pelas fichas azuis (um triângulo com uma ficha no seu interior).

> Admitamos que essas fichas vermelhas sejam alinhadas, A_2 representará então, à vontade, A_1 ou A_1' ou B_1', etc., A_2' representará ao mesmo tempo qualquer termo de D_1 salvo aquele que já se encontra colocado em correspondência com A_2 etc. Desde logo, a reunião $A_2+A_2'+B_2'+C_2' = D_2$ assumirá o sentido do número 4 e não das fichas dispostas em triângulo; $A_2+A_2'= B_2'$, significará o número 2 e não mais a classe das fichas situadas nas duas extremidades do lado esquerdo, etc. Ademais, qualquer reunião de dois elementos $A_2'+B_2'$, bem como A_2+A_2' ou $B_2'+C_2$ dará nascimento a uma mesma classe B significando 2 elementos independentemente de suas qualidades. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.142)

Desta forma, a correspondência termo a termo deixa de ser qualitativa e se torna numérica assim que os elementos são concebidos como equivalentes entre si (membros de uma mesma classe). Para isso os caracteres diferenciais que poderiam colocá-los em oposição uns aos outros como elementos de uma mesma classe são substituídos por sua posição relativa na ordem de colocação em correspondência, originando então a unidade e, logo o número.

Analogamente, as relações que se referem às diferenças são aritmetizadas de acordo com o mesmo mecanismo, ou seja, desde que a igualização das diferenças é acrescentada às coordenações das qualidades acontece a composição numérica e a intervenção da unidade (por exemplo, a igualização da densidade).

Agora, é importante ficar claro que nenhuma dessas composições qualitativas pode definir, isoladamente, unidades propriamente ditas. De fato, se duas classes são reunidas numa classe total, elas não constituem duas unidades porque estão reunidas em função da semelhança entre seus elementos ou de suas qualidades comuns, desconsiderando-se as eventuais diferenças. Da mesma forma, duas relações assimétricas (distâncias entre a e b e entre b e c, por exemplo), reunidas numa relação total não constituem duas unidades, porque se a relação total adiciona numa só todas as diferenças exprimidas por cada relação componente, as diferenças parciais não são equivalentes.

No entanto, para constituir a correspondência “qualquer” e, por conseguinte, o número, é necessário a igualização das diferenças que é o mesmo que reunir num único todo operatório a classe e a relação assimétrica; os termos então enumerados são ao mesmo tempo equivalentes entre si (membros de uma classe) e diferentes uns dos outros em função de sua posição (ordem de enumeração ou relação assimétrica).

Enfim, com a constituição da correspondência qualquer, o número emerge como síntese das classes e das séries, sendo, todavia, irredutível a elas, já que nenhuma dessas operações, por si só, engendra a unidade. Ainda não se pode concluir pela constituição da seqüência ou sucessão dos números inteiros. Esta só irá se concretizar com a recorrência (iteração das unidades), que acontece com a constituição, solidária e recíproca dos aspectos ordinal e cardinal do número.

Ao serem finalizados os estudos sobre as correspondências (provocadas ou espontâneas), a conclusão extraída foi a de que o número emerge como síntese das classes e das séries. E é exatamente até este ponto que quase todas as propostas pedagógicas fundamentadas na teoria piagetiana abordam a construção do número, daí a profusão de atividades para que a criança estabeleça uma infinidade de correspondências (na sua quase totalidade do tipo provocada). Poucos livros avançam na abordagem da reciprocidade entre ordinais e cardinais e a quase totalidade, insinua a construção linear do número, com o estabelecimento primeiro das classes e das séries, para só depois vir o número.

A participação das classes em relação à qual a parte que lhe compete “dentro” do número é geralmente apresentada apenas como responsável pela compreensão de que a última palavra-número pronunciada numa contagem representa o total dos elementos da coleção (inclusão de classes) e, algumas vezes é acrescida da função de estabelecer, dentro de um determinado conjunto, quais os elementos que serão contados, dos que não serão.

O papel da série é ainda mais restrito por que “serve” apenas para verificar se todos elementos foram contados e uma única vez, ou seja, trata-se apenas de séries vicariantes.

Entretanto, o número, particularmente em seu aspecto cardinal, desempenha importante papel na constituição da seriação propriamente dita, ou a correspondência ordinal, o que é abordado a seguir.

3.4 A COORDENAÇÃO ENTRE A ORDEM E A CARDINALIDADE

Os resultados anteriormente apresentados permitiram concluir que o número é a síntese da classe e da série ou, dito de outra forma, uma classe seriada. Interrompidos aqui os estudos acerca da construção do número, a interpretação de que as classes e séries antecedem o número faz sentido, pois as pesquisas realizadas só evidenciaram a participação das duas primeiras estruturas na construção da terceira em detrimento da recíproca, à exceção de poucos comentários sobre suas interdependências.

No caso específico da correspondência termo a termo biunívoca e recíproca, os elementos das coleções são considerados iguais e só podem ser distinguidos uns dos outros por sua posição (espacial ou temporal). Além disso, os elementos podem ser seriados em qualquer ordem desde que ele permita contar cada elemento e somente uma única vez (ordem vicariante), podendo induzir à falsa idéia da existência de uma primazia das classes (aspecto cardinal) em relação às séries (aspecto ordinal), na construção do número.

Por outro lado, quando as coleções em jogo são formadas por elementos que podem ser diferenciados por caracteres passíveis de seriação "as categorias assim estabelecidas numa dessas coleções correspondem às categorias estabelecidas nas outras graças a esses mesmos caracteres, com a ordem assim constituída não sendo mais vicariante". Assim, por possuir um acentuado interesse na ordem, a correspondência estabelecida será denominada correspondência ordinal (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.147).

O que se pretende mostrar aqui é que, da mesma forma que a ordem está presente quando da correspondência de coleções de objetos iguais (ordem vicariante), cuja ênfase está na cardinalidade, esta última é, por sua vez, correlativa da correspondência ordinal no caso de conjuntos finitos.

Em outros termos, o número (em seu aspecto cardinal) e, conseqüentemente, as classes, são fundamentais para a constituição da ordem (seriação). Além disso, simultaneamente está sendo concluída a análise genética das "quatro qualidades" que compõem o número, com o estudo do aspecto ordinal do número (de forma indissociável ao cardinal).

As provas realizadas por Piaget e Szeminska foram as das bonecas e bengalas (ou "sacos" de montanha); dos cartões seriados e a dos tapetes e barreiras e os resultados apontam para as mesmas três fases: comparação global, sem seriação exata e sem correspondência espontânea (cardinação); seriação e correspondência progressiva e intuitiva e, seriação e correspondência imediata e operatória.

São três as operações possíveis para o estabelecimento da correspondência ordinal: *seriação qualitativa simples*; correspondência qualitativa entre duas seriações *(similitude*) e a *correspondência numérica* (ordinal).

Cada uma das operações relacionadas acima evolui por três etapas mais ou menos sincrônicas entre si e igualmente sincronizadas com as fases pelas quais evolui a correspondência cardinal. Assim, a correspondência serial apresenta as seguintes fases: comparação global sem seriação exata ou correspondência termo a termo espontânea; seriação e correspondência progressivas e intuitivas e, seriação e correspondência imediata e operatória.

Para a correspondência serial não diretamente percebida, as etapas são: ausência de correspondência entre os termos não mais posicionados defronte um do outro; tentativa de estabelecimento de correspondência com o auxílio da contagem ou de uma nova correspondência semi-intuitiva (ambas fracassadas) e, descoberta da correspondência pela combinação entre as noções ordinais e cardinais.

Quanto à reconstituição da correspondência após uma (ou ambas) fileira ter sido desfeita, a criança da *primeira* fase não é capaz de reconstruir por si mesma a série e apela à correspondência visual ou decide arbitrariamente; na *segunda* fase, recorre também à contagem, porém desconsidera a ordem ou confunde a categoria procurada com a do termo anterior e, finalmente, na *terceira* fase, ao coordenar a seriação e a cardinação, consegue estabelecer a correspondência desejada.

Os resultados das provas realizadas para estudar a construção da correspondência serial apresentam como conclusão interessante o fato de que a ordem de dificuldade das coordenações de relações exigidas para *construir uma série* ou colocar duas séries em correspondência é exatamente a mesma e são três os métodos possíveis para isto: *seriação dupla*, *seriação simples com correspondência* e a correspondência termo a termo direta (*correspondência ordinal*).

As crianças da *primeira* fase não são capazes de empregar a seriação dupla, pois não conseguem, sequer, construir de saída, corretamente, uma das séries e, então, para estabelecer a correspondência com a segunda, elas procedem, sucessivamente, uma a uma. Quando empregam o método da seriação simples com correspondência, as crianças desta primeira fase não obtêm êxito com a seriação espontânea, limitando-se a alinhar os objetos aleatoriamente. Mesmo quando recebem sugestões de partir do maior (menor) para o menor (maior), não conseguem sucesso, por não conseguirem perceber que um determinado elemento deve ser, ao mesmo tempo, menor (maior) que o precedente é maior (menor) que o conseqüente e, então, seriam aos pares. E, finalmente, as correspondências estabelecidas são correlatas às seriações, isto é, são também globais e pré-seriais.

Um outro fato a ser considerado é o de que a ordenação ou seriação "supõem ou constituem já uma espécie de correspondência, aquela que liga cada termo ao seguinte: poder-se-ia dizer que a seriação é uma correspondência intrínseca" e a similitude, uma correspondência extrínseca entre duas séries. "Inversamente, aliás, pode-se dizer que toda correspondência supõe uma seriação, seja qual for o tipo desta", o que significa, em resumo, que se "a seriação espontânea não é possível, a correspondência serial não o é tampouco e reciprocamente". O mesmo se pode dizer da correspondência cardinal, evidenciando assim, que neste nível (4,6 - 5 anos) as operações são substituídas por uma avaliação global (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.154).

As crianças da *segunda* fase, por outro lado, constroem (após tentativas, erros e correções) espontaneamente séries corretas e, portanto, resolvem o problema da correspondência serial, particularmente, pelo método da seriação dupla. A seriação e a correspondência serial permanecem intuitivas e perceptivas, porém, o sujeito é capaz de posicionar um elemento numa série de modo que ele seja simultaneamente o maior (menor) dos que ainda não foram seriados e o menor (maior) daqueles já dispostos em série.

A correspondência serial própria desta segunda fase se elabora em estreita conexão com a seriação sem que se confundam, pois, apesar de se apoiarem mutuamente permanecem distintas. De fato: assim que as ligações estabelecidas entre os elementos se tornam realmente relativas, já é possível a coordenação de duas relações entre si (pelo menos três elementos) e, então, não é difícil coordenar mais, de forma que podem ser então construídas, tanto a correspondência serial quanto a seriação simples.

Além disso, uma vez descoberta a passagem da qualidade à relação, esta descoberta (bastante difícil) engendra tanto seriações duplas correspondentes quanto séries aditivas isoladas. Entretanto, as relações descobertas continuam pertencendo aos planos intuitivo e experimental, sendo, portanto, semi-operatórias, ligadas à percepção e não passíveis de manipulação abstrata.

Durante a *terceira* fase a série é construída sem hesitações ou tateios. Cada vez que escolhem um novo elemento para a série em construção as crianças consideram o conjunto de relações entre todos os elementos para determinarem o maior (ou menor) dos termos restantes. Além disso, a criança opera, com a mesma facilidade, tanto por correspondência imediata (sem seriação prévia) quanto por seriação simples seguida de correspondência.

Assim, a construção da correspondência serial ou similitude qualitativa é concluída por “um sistema de operações propriamente ditas, suscetíveis de coordenar tanto as relações inversas quanto as diretas” (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.158).

Finalmente, a construção da *correspondência ordinal* apresenta as mesmas três etapas da similitude, com poucas novidades. Numa *primeira* a criança perde toda noção da correspondência quando se desloca uma das duas séries e para recuperá-la, se limita a fazer corresponder os elementos no momento colocados um defronte ao outro. Na *segunda*, a criança tenta, mediante a contagem ou outros procedimentos empíricos, restabelecer a correspondência exata, porém, confunde, constantemente, a categoria do termo precedente com a procurada. Na *terceira* fase, enfim, ao coordenar a busca da categoria procurada com o valor cardinal das coleções pertinentes, a correspondência serial qualitativa e a correspondência numérica ordinal se duplicam.

Em resumo, a criança da *primeira* fase da correspondência serial deixa de apreender as correspondências a partir do momento em que os elementos não mais se posicionam diretamente um defronte ao outro, mesmo quando as séries permanecem paralelas e com pequena variação dos intervalos entre os elementos e dos comprimentos totais. O que fica evidente é a *comparação global* sem a compreensão, nem mesmo intuitiva, dos detalhes das relações.

Durante a *segunda* fase, as crianças são capazes de estabelecer a correspondência serial entre duas coleções, ou seja, não apenas a correspondência termo a termo, mas também categoria por categoria, no entanto, alterando-se a configuração das fileiras, os sujeitos negam a equivalência cardinal. Este fato demonstra que a correspondência serial não é mais suficiente para a equivalência cardinal que a correspondência qualitativa pertinente deste nível. Todavia, mesmo não acreditando na *equivalência cardinal*, a criança crê ser possível reencontrá-la, reconstituindo a correspondência e, a busca das categorias correspondentes demonstra um avanço em direção tanto à reversibilidade quanto à contagem, pois ao se apoiar na categoria para restabelecer a equivalência, o próximo passo é utilizar a contagem. É este esforço que irá conduzi-la à noção de equivalência durável, ao mesmo tempo cardinal e ordinal que caracteriza a terceira fase.

> [...] para determinar uma categoria qualquer por enumeração, a criança considera isoladamente a posição qualitativa do elemento em questão e igualmente à parte o valor cardinal dos elementos que o precedem: não compreende que cada categoria é ela própria um número, nem que este número é indissociável da coleção inteira de que faz parte o elemento assim ordenado. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.167)

Durante a *terceira* fase acontece o “duplo progresso da correspondência”, que deixa de ser intuitiva e passa a ser operatória tanto como correspondência serial quanto ordinal. Este fato conduz a uma necessária conexão entre a ordenação e a cardinação.

A equivalência cardinal alcançada é fundamental para a aritmetização da correspondência serial e, as crianças, para determinarem uma categoria ***n***, empregam toda a numeração pertinente, tanto no sentido crescente quanto decrescente.

Estes resultados deixam evidente a influência do número cardinal (e da contagem) para que a correspondência serial seja completada e demonstram que o número intervém na constituição da série, pois é somente com a equivalência cardinal que é possível a aritmetização e a contagem. Ora, a contagem é determinante na busca da categoria ***n*** e, conseqüentemente, da correspondência serial que se torna ordinal com a transformação dos elementos em unidades homogêneas. Nessa situação a ordem não pode mais ser vicariante em função das categorias em jogo.

Finalmente, graças à correlação entre a equivalência da cardinação (elementos homogêneos) e da ordenação desligada da qualidade, o termo ***n***, passa a assumir simultaneamente para a criança o duplo significado de uma soma cardinal ***n*** e a ***nª*** posição (categoria).

> [...] a seriação intuitiva só se constituiria em ordenação verdadeira a partir do momento em que se torna operatória e só se torna operatória no momento em que se coordena com a cardinação. Inversamente, a coligação e a correspondência intuitiva só se transformariam em cardinação verdadeira a partir do momento em que se tornam operatórias e só assim se tornariam coordenando-se com a ordenação.(PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.196)

Com a constituição das operações a criança se liberta da intuição perceptiva e isto conduz a três importantes conquistas: a) a generalização das operações qualitativas; b) a diferenciação entre operações qualitativas e numéricas e c) a necessária interação entre ordinal e cardinal.

a) É exatamente quando as relações envolvidas se tornam reversíveis que a criança é capaz da conservação das quantidades, da equivalência cardinal durável e de seriação operatória (coordenar as relações inversas $s>r$ com $s<t$). Além disso, a criança se torna apta a realizar composições reversíveis, estabelecendo o domínio de sua lógica qualitativa.

De posse desses sistemas de composições reversíveis a criança, quando confrontada perceptivamente com uma pluralidade de elementos (como os bonecos seriados) reage de duas maneiras. Em primeiro lugar, ela pode abstrair as diferenças dos elementos e reter suas qualidades comuns, transformando-os em homogêneos, isto é, estabelece a equivalência dos elementos que conduz à construção das classes lógicas. Todavia, os elementos tornados homogêneos permanecem distintos uns dos outros, distinção esta estabelecida por uma outra qualidade que não seja a qualidade comum geradora da equivalência, e este é o ponto de vista das relações assimétricas ou da não-equivalência.

Assim, a classe é construída pela abstração das diferenças enquanto que a relação assimétrica pela abstração das equivalências de modo que classes e relações assimétricas se complementam e é então, impossível construir classes sem relações (permitem qualificar os elementos) e relações sem classes (permitem estabelecer os elementos ligados).

A classe, todavia, é apenas uma reunião de indivíduos qualificados e não-enumerados, de modo que, embora constituindo totalidades hierárquicas, não existe ainda cardinalidade.

As séries obtidas também não conduzem à nenhuma ordenação real e embora a relação assimétrica (enquanto ligação entre qualidades) seja necessariamente quantificante por não conduzir à fusão dos elementos mas à sua distinção, ela não engendra o número, somente o prepara.

Desta forma, o caráter reversível das relações em jogo já permite uma quantificação, porém, pela não participação do número, esta quantificação só atinge quantidades intensivas, não-redutíveis a um sistema de unidades.

b) Uma vez apta a realizar tais composições lógicas a criança é também capaz de extrair delas as composições numéricas correspondentes e de diferenciá-las das operações qualitativas. Esta diferenciação entre operações numéricas e qualitativas é devida ao fato de que nas operações numéricas os elementos não são mais considerados como equivalentes ou não-equivalentes (pressupõe uma qualidade), mas, simultaneamente, como equivalentes e não-equivalentes ou ainda, “o número não é somente classe totalizante nem apenas relação seriante, mas, ao mesmo tempo, classe hierárquica e série” (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.218).

Mas, se apenas a qualidade for considerada não poderia existir uma relação que seja ao mesmo tempo classe e série. Assim, para que seja possível considerar os elementos simultaneamente como equivalentes e não-equivalentes é necessário que as qualidades sejam eliminadas de forma a tornar cada elemento como unidade equivalente às outras, (como no exemplo de “contar as pessoas que usam óculos e que estão numa sala”) e, então, seriá-las para estabelecer uma diferença entre os elementos tornados homogêneos, (como estabelecer uma ordem para “contar as pessoas de óculos”) e constituindo, portanto, a iteração da unidade.

c) Os resultados até aqui permitem afirmar que o número é um sistema de classes e séries fundidas num todo operatório e que, embora tendo suas fontes na lógica, é irredutível a ela. Além disso, um número cardinal pode ser definido como uma classe constituída de elementos concebidos como unidades homogêneas, porém, distintas, sendo que suas diferenças consistem apenas no fato de que tais unidades podem ser seriadas e, conseqüentemente, ordenadas. Concebidos desta forma, os cardinais resultam de uma abstração da relação assimétrica tal que “essa abstração não altera a natureza de suas operações, pois todas as ordens possíveis de se atribuir a ***n*** termos vêm a dar na mesma soma cardinal ***n***”. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.219)

Mas, se a série é necessária para a constituição do próprio cardinal, a equivalência (classes) é imprescindível para a constituição do número ordinal. De fato, os números ordinais constituem uma série onde os termos se sucedem de acordo com relações de ordem determinadas por suas respectivas posições, permanecendo, porém, equivalentes entre si e, portanto, passíveis de reunião cardinal. Concebidos assim, os ordinais resultam “de uma abstração da classe, abstração igualmente legítima, e, por esta mesma razão, o ***n-ésimo*** termo finito corresponderá sempre a um conjunto cardinal ***n***”. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.220).

O fato de existir esta dupla abstração (da relação assimétrica e das classes), não significa que o número inteiro finito (a exemplo do número qualquer) deixa de permanecer uno ou que as totalidades e a ordem possam ser dissociadas. Esta dupla abstração apenas reforça a reciprocidade entre cardinação e ordenação demonstrando que os números finitos são simultaneamente cardinais e ordinais.

Concluída uma primeira demonstração da implicação do número na constituição da série, resta demonstrar qual papel o número desempenha em relação às classes. Em outros termos, deixar claro que, sem a noção de número cardinal que está implícita nos termos “um”, “nenhum”, “alguns” e “todos”, a inclusão de classes não seria possível.

> [...] as classes são, portanto, num certo sentido, números não-seriados, como os números são classes seriadas, e tanto a constituição psicológica quanto a constituição lógica das classes, das relações e dos números constituem um desenvolvimento de conjunto do qual os movimentos respectivos são sincrônicos e solidários uns com os outros. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.219)

3.5 AS RELAÇÕES ENTRE CLASSES E NÚMEROS

As pesquisas do Centro Interdisciplinar de Epistemologia Genética que sucederam *A gênese do número na criança* evidenciaram melhor a importância do número para a constituição das classes e das séries, inclusive, com estudos acerca da presença de um estádio “pré-numérico” (não apenas lógico), já no sensório-motor e anterior à classificação e à seriação operatórias. Todavia, como pretendemos demonstrar que a primeira obra piagetiana acerca do número é suficiente para a compreensão de que este é necessário ao acabamento das estruturas lógicas, os “novos” resultados não serão utilizados neste momento, para mostrar que:

> Em vez de querer derivar o número da classe, ou o inverso, ou considerá-los como radicalmente independentes, pode-se efetivamente concebê-los como complementares e a se desenvolver solidariamente, embora em duas direções diferentes. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.224)

Para analisar esta interdependência é necessário estabelecer os relacionamentos entre qualidade (lógica) e quantidade (número) ou entre a compreensão e a extensão dos conceitos.

A existência de uma dependência mútua entre a extensão e a compreensão de conceitos lógicos é fato conhecido, pois para conceber a compreensão de um conceito é necessária a referência aos termos que constituem o suporte dos caracteres que a definem e estes termos são, precisamente, a extensão do conceito.

Entende-se compreensão como “conjunto de qualidades comuns sobre as quais se apóia a generalização” e extensão, como “conjunto de situações às quais se aplica a generalização”. (MONTOYA, 1996, p.46)

É fácil ver que a compreensão se apóia na qualidade e que extensão implica quantidade, de modo que a mesma dependência mútua existente entre compreensão e extensão se verifica entre qualidade e quantidade e, portanto, o pensamento passa, sem cessar, entre estes dois aspectos do conceito, de acordo com o contexto.

Por exemplo:

> Na proposição ‘as aves são vertebrados’ ou mesmo ‘as Aves são Vertebrados’, é possível que a maioria dos sujeitos se limite a qualificar em compreensão, mas em ‘as Aves não constituem mais que uma parte dos Vertebrados’, a extensão evidentemente leva a palma. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.224)

Em função desta interdependência entre qualidade e quantidade é lícito esperar que, da mesma forma que a construção dos números é inseparável das classes e das séries, os manejos das operações qualitativas e numéricas também são solidários. É por essa razão que Piaget e Szeminska analisam as relações entre classes e números.

Já foi visto que as operações aditivas e multiplicativas estão implícitas na própria construção do número (iteração das unidades e multiplicação de relações assimétricas). Isto implica na possibilidade de reunir os elementos dispersos numa totalidade ou de decompor esta totalidade em partes. Além disso, é fato conhecido, desde Leibniz, que a lógica, tanto das classes quanto das proposições consiste num algoritmo da parte e do todo.

A diferença existente entre este relacionamento parte/todo no que se refere à classe e números, é que, no caso destes últimos, as partes são unidades homogêneas ou frações de unidades e, no caso das primeiras, as partes são ainda classes qualificadas reunidas em função de uma qualidade comum. Devido a estes últimos elementos serem qualitativos, independentemente de sua quantidade, resulta sempre numa intervenção de uma quantificação intensiva nas relações de inclusão presentes em toda composição aditiva.

Em outras palavras, sob a ótica aditiva, o *todo* possui necessariamente “mais” elementos do que cada parte, dotando de significação quantitativa os termos “um”, “nenhum”, “alguns” e “todos”, termos inerentes a toda combinação de classes. Porém, isto é equivalente a dizer que a classe precisa do número para completar sua construção.

Ou, de outra forma, sem a presença dos quantificadores intensivos (que por sua vez somente são compreendidos quando da conservação das quantidades) a criança não é capaz de conceber as relações de parte/todo no domínio da classificação não construindo, portanto, a inclusão hierárquica das classes.

Piaget e Szeminska estudaram então, a inclusão das subclasses (classes parciais) numa classe total, analisando a ligação dos determinantes lógicos essenciais "alguns" e "todos", com o objetivo de deixar evidente que a quantificação é inerente a toda adição, inclusive a das classes.

Para isso, consideraram uma classe lógica B (constituída por uma coleção de objetos individuais), passível de ser definida por compreensão (em termos qualitativos) e A, uma subclasse de B, também definível por compreensão. O problema apresentado à criança consistia em verificar se a classe B é "maior" ou tem "mais" elementos ou é mais numerosa que a subclasse A.

O material utilizado já era conhecido das crianças, pois foi utilizado nas provas acerca da conservação de quantidades. O material era composto por contas de madeira (B), das quais a maioria é marrom (A) e, poucas contas (duas ou três) são brancas (A'). A questão colocada era determinar se a caixa continha mais contas de madeira (B) ou mais contas marrons - chamadas de castanhas pelos pesquisadores – (A).

As crianças compreendiam que, tanto as contas marrons quanto as brancas são de madeira e, também, a composição aditiva de classes mais elementar dada por A+A' = B. A resposta deveria surgir, então, como conseqüência do seguinte raciocínio: se A+A' = B então A = B-A' e, portanto, A<B, o que, entretanto, não acontece, pelo menos de imediato.

Procurando facilitar a compreensão da questão os pesquisadores a tornaram ainda mais intuitiva, perguntando qual de dois colares seria mais comprido, o confeccionado pelas contas de madeira (B) ou o com as contas marrons (A). Uma outra estratégia utilizada foi colocar previamente duas caixas vazias ao lado do recipiente com as contas e indagar para a criança, se caso fossem colocadas todas as contas marrons na caixa vazia, restariam contas no recipiente? E, caso as contas retiradas fossem as de madeira, mesmo assim, sobrariam contas no recipiente?

Para confirmar os resultados as provas foram repetidas variando as coleções B e A (coleção de contas azuis (B), com a maioria quadrada (A) e duas ou três redondas (A'); ou coleção de flores (B), formada por 20 papoulas (A) e duas ou três escovinhas (A') ou, ainda por 14 crianças (B) sendo 12 meninas (A) e dois meninos (A')).

As três etapas já destacadas quando da análise da conservação da quantidade e da correspondência ordinal são reencontradas no presente caso. Durante uma *primeira* fase a criança ainda não é capaz de composição aditiva e nem consegue pensar no todo B e nas partes A e A' ao mesmo tempo, logo, por não conceber A+A' = B, não compreende que A = B-A' e, então admite que A>B.

As diversas experiências realizadas revelaram como sistemáticas as dificuldades das crianças do período intuitivo para compreender que a classe total é “maior” ou “mais numerosa” que a classe parcial nela contida.

Os resultados mostraram que as crianças também reagem de maneira diferente em relação às diversas coleções. Na situação onde B = crianças e A = meninas, as crianças apresentaram uma maior facilidade do que na das contas, com a coleção das flores podendo ser considerada num nível intermediário. Isto demonstra que o fato de designar as classes totais e parciais por nomes especiais favorece a diferenciação e a hierarquização destas e revela a *importância da linguagem e do contexto social* no processo. No que se refere à questão da comparação entre a quantidade de elementos entre A e A', foram realizadas diversas provas que permitiram concluir que os fatores perceptuais pouco ou nada favorecem a inclusão hierárquica.

De maneira geral, o característico desta fase é que, apesar de compreenderem perfeitamente que B = A+A', ao serem impelidos a pensar, ao mesmo tempo, no todo e na parte, os sujeitos de idade inferior a 6 – 7 anos deixam patentes suas dificuldades.

> Ou melhor, a criança quando pensa no todo consegue bem representar as partes ainda não associadas (pois, por exemplo, desenha corretamente o colar correspondendo ao todo e distingue muito bem neste todo uma vintena de contas castanhas e as duas contas brancas), mas, quando procura dissociar uma das partes, não consegue mais se

> lembrar do todo ou levá-lo em conta, limitando-se a comparar a parte que se ocupa à parte restante, ou seja, o resíduo do todo primitivo. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.235)

Desta forma, a relação estabelecida pela criança entre parte e todo não é ainda quantitativa, nem mesmo intensivamente e, portanto, não é também inclusão, mas, uma participação qualitativa. As totalidades consideradas seriam apenas “agregados sincréticos” e não ainda classes lógicas.

Por não compreender que “todos” os A são B; “alguns” B são A; nenhum A é A’, a criança ao comparar A com B, o faz de maneira intuitiva e não operatória. Assim, dividida em duas partes (realmente ou em pensamento), a totalidade B = A+A’, não existe mais perceptivamente em si mesma e o sujeito percebe, separadamente, o todo B ou cada parte A e A’, mas não B e A ou B e A’ ao mesmo tempo. Assim, ao comparar A e B, com A separada de B, confunde o todo B com a parte que sobra A’ e *se dissolve*.

Por não estabelecer corretamente a relação de inclusão, a criança desta *primeira* fase substitui o encaixe em extensão das classes por simples relações intuitivas das coleções qualificadas. Por permanecerem intuitivas e dependentes da percepção, tais ligações não conduzem a nenhuma conservação das totalidades lógicas, repetindo os resultados encontrados no plano numérico.

Em outras palavras, tanto no plano numérico como no lógico, “as totalidades não se conservam e isso por falta dessa reunião *sui generis* das partes num todo, síntese na qual consiste a composição aditiva comum aos conjuntos numéricos e às classes” (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.241).

Na *segunda* fase a criança consegue por tentativas e não por composição imediata chegar à resposta correta, o que caracteriza uma descoberta ainda intuitiva e não dedutiva.

As crianças desta segunda fase, a exemplo das da primeira fase, começam por considerar que as contas marrons são mais numerosas que as de madeira ou, que as coleções são iguais. Depois, recordam que as contas brancas são também de madeira e concluem: “há mais” de madeira, deixando evidente que só quando conseguem pensar ao mesmo tempo na cor (A e A’) e na substância (B) das contas é que alcançam tanto a composição aditiva quanto a inclusão adequadas.

As crianças da *terceira* fase conseguem espontaneamente e de imediato (ou quase) pensar, ao mesmo tempo, na classe total B (caracterizada pela qualidade *b* = substância) e na classe parcial A (definida pela qualidade *a* = cor) de onde concluem que: "todas" as A são também B, mas que em B estão também as A', isto é, "alguns" B são A e "alguns" B são A', compreendendo finalmente que B = A+A' e que A = B-A'.

Como pretendemos evidenciar o papel da quantificação no desenvolvimento das totalidades lógicas importa agora analisar por que as crianças da primeira fase fracassam, enquanto que para as da terceira fase, a conclusão correta emerge de forma simples e necessária.

Para isso é preciso distinguir dois problemas: o da síntese das qualidades *b* e *a* ou *a'* e o da adição em extensão (quantidade) A+A' = B.

Numa adição de classes A+A' = B, B é a menor das classes que contém A e A', pois é definida pela qualidade *b*, comum aos A e aos A'. Portanto, cada elemento da classe resultante B pertence necessariamente a duas classes ao mesmo tempo, o que implica numa multiplicação lógica dessas classes, com "todos" os A apresentando as qualidades *ab*, "todos" os A' são *a'b* enquanto que "alguns" B são *ab* e "alguns" B são *a´b*.

Duas explicações equivalentes podem ser aferidas do exposto para o fracasso das crianças da primeira fase: uma, consiste em afirmar que tais sujeitos não conseguem pensar nas qualidades *a* e *b* ou *a'* e *b* ao mesmo tempo e a outra acentuaria a dificuldade da própria adição lógica (quando a parte A é dissociada do todo B, B se dissolve). Entretanto, isoladamente, nenhuma das explicações é suficiente para justificar as respostas próprias deste nível e é indiferente dizer que a síntese aditiva fracassa devido à ausência de multiplicação lógica ou que a síntese multiplicativa fracassa devido à ausência de adição lógica.

Lembrando que na *multiplicação lógica* o que está implícito é a *qualidade* e na *adição* em extensão A+A' = B é a *quantidade*, o que está, então, em jogo, é uma implicação recíproca entre qualidade e quantidade; entre compreensão e extensão, ou, de maneira mais apurada, de classe e número.

A verdadeira razão que inviabiliza esta mútua implicação é a irreversibilidade da percepção atual, fundamento dos julgamentos das crianças da primeira fase, o que lhes impossibilita tanto a coordenação das qualidades quanto a inclusão aditiva e a coligação aritmética.

É a presença da mobilidade e reversibilidade nas construções realizadas que possibilitam a decomposição e recomposição das coleções, isolando suas diversas implicações, inclusões e relações em geral. Dessa forma, a irreversibilidade tanto do pensamento quanto da representação da criança inviabiliza a decomposição necessária à análise e à síntese e, em conseqüência, à compreensão das inclusões e das relações.

> Ora, essa irreversibilidade psicológica se traduz, no plano lógico, pelo efeito seguinte, que é de importância fundamental. Conceber as partes em função do todo e reciprocamente é compor simultaneamente as duas igualdades A+A' = B e A =B-A' e, portanto, é efetuar a operação inversa, tanto quanto a operação direta. Pensar de maneira irreversível, ao contrário, é não saber passar de uma destas operações para a outra, é, portanto, em poucas palavras, não saber manejar as operações como tais: é substituir um mecanismo operatório móvel e de direção dupla pelas percepções estáticas e sucessivas de estados que é impossível sincronizar e, conseqüentemente, conciliar. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.247)

A discussão acerca da reversibilidade é fundamental para a compreensão da mobilidade do pensamento, uma vez que as análises anteriores poderiam levar à falsa idéia de um pensamento traduzido por um *esquematismo* estático das inclusões silogísticas. Ao contrário, cada raciocínio é uma construção reversível e, para cada tipo de construção corresponde um tipo de raciocínio.

Assim, da mesma forma que um raciocínio matemático (algébrico, aritmético ou geométrico) consiste em combinar objetos (símbolos, números ou figuras) mediante cálculos ou construções espaciais, o raciocínio classificatório combina os objetos por meio da adição e multiplicação lógicas, agrupando e dissociando tanto os objetos quanto as classes em sistemas hierárquicos.

Descrever as dificuldades das crianças em termos da reversibilidade não apenas manifesta a homogeneidade do mecanismo operatório de construção das classes e dos números, como também, acrescenta uma “terceira dimensão a uma imagem plana”, movimentando os termos estáticos da descrição (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.248).

Resta agora compreender como se *constitui* o agrupamento das classes, em que estes *diferem* dos grupos numéricos e, quais são as *relações* entre estes sistemas.

Do ponto de vista psicológico, a classe A é *constituída* pela reunião de elementos que apresentam em comum a qualidade *a*, sem que nada seja estabelecido em relação ao número de elementos de A.

Assim, se A+A’ = B e se as classes A+A’ não são vazias, as únicas informações que se tem acerca de números de elementos são:

- B tem “mais” elementos que A e que A’ (e as recíprocas);
- “Todos” os A são B e “todos” os A’ são B;
- “Nenhum” A é A’ e “nenhum” A’ é A;
- “Alguns” B são A e “alguns” B são A’.

Em outras palavras, a classe em extensão permite apenas as quantificações intensivas, ignorando a quantificação extensiva que caracteriza o número. Esta é a *diferença* entre os agrupamentos de classes e os grupos numéricos, restando analisar as possíveis relações entre eles.

Como já foi visto, a solução clássica de Bertrand Russell mostrou-se insuficiente para resolver a questão, pois a correspondência biunívoca construída para estabelecer a igualdade entre duas coleções é qualquer e, portanto, pressupõe o número. A solução piagetiana, ao contrário, apresenta o número como uma síntese das classes e das relações assimétricas (irredutível a elas), constituindo um novo todo operatório.

Assim, duas condições são necessárias e suficientes para a síntese do número, a saber: se “A+A’ = B e se, ao mesmo tempo, A→A’ (com A e A’ sendo vicariantes, isto é, podendo os seus conteúdos ser intercambiados), então B = A+A = 2A”. Em outras palavras, o “número é, ao mesmo tempo uma classe e uma relação assimétrica, com as unidades que o compõem sendo simultaneamente adicionadas enquanto equivalentes e seriadas enquanto diferentes umas das outras” (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.252).

Tal fusão, todavia, não é possível num sistema de lógica qualitativa, pois a composição aditiva das classes é comutativa, enquanto que, por se referir às diferenças, a seriação não é comutativa.

O número só será possível com a generalização (caráter geral da matemática) da equivalência (unidades homogêneas) e da seriação (vicariante), generalização que resulta da igualização das diferenças, tudo isto, simultaneamente.

Ao conseguir tornar móveis os julgamentos intuitivos, a criança alcança a reversibilidade inerente às operações, tornando-se, ao mesmo tempo, capaz de incluir, de seriar e de enumerar.

Logicamente, este sincronismo é explicado pelo fato de que o número resulta da fusão, num mesmo todo operatório, da classe e da série. Todavia, tal sincronismo pode ser também justificado psicologicamente:

> [...] por um lado, sendo cada número uma totalidade nascida da reunião de termos equivalentes e distintos, é preciso simultaneamente incluir e seriar para constituí-lo; por outro, se a quantificação intensiva própria às classes (A<B<C etc.) não implica os números particulares para se concluir, supõe, entretanto, que o sujeito seja capaz de construir estes últimos sem o que as relações de extensão perdem todo sentido concreto. (PIAGET e SZEMINSKA, 1981, p.253)

Em outras palavras, se o número tem sua fonte na classe, esta última, apóia-se no primeiro, de forma implícita, como referência visual constante, envolvendo a rede das extensões, sendo então, não apenas solidários e complementares, mas, também, interdependentes.

3.6 As relações aritméticas: as composições aditiva e multiplicativa dos números

Freqüentemente se fala "das quatro operações fundamentais" da aritmética: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, todavia, elas podem também, serem consideradas como duas, a adição e a multiplicação, já que a subtração e a divisão são suas respectivas inversas surgindo como conseqüências das operações diretas.

Além disso, para que a construção do número inteiro positivo se complete é preciso ainda, que a criança descubra as operações de adição e de multiplicação. Na verdade, estas operações não apenas estão implícitas no número como tal como, também, o engendram (particularmente a adição, mediante a iteração das unidades).

Já foram estabelecidos os papéis das classes e das séries na constituição do número e, reciprocamente, do número na constituição das classes e das séries.

Em resumo: uma *quantificação bruta*, em termos de "mais", "menos" e "igual", leva a uma *classificação primitiva* que possibilita a descoberta dos *pré-números*: todos, nenhum e alguns. Estes pré-números são constituintes da *quantificação intensiva* que engendram a *inclusão de classes* a qual, permite a abstração das diferenças e a constituição das *unidades*. Com o surgimento dos quantificadores *quase todos*, *meio* e *metade*, característicos da *quantificação extensiva não métrica*, emerge uma *seriação simples* (ordem vicariante). A inclusão de classes e a seriação simples engendram, numa síntese, a equivalência das quantidades (cardinal) que colabora com a construção operatória da seriação (correspondência ordinal) constituindo a *quantificação extensiva métrica* e, conseqüentemente, o *número*.

Não analisamos, ainda, a sucessão numérica que se origina da iteração das unidades.

Todavia, mesmo em se tratando de operações propriamente ditas (adição e multiplicação), o sincronismo se repete. A adição e a multiplicação das classes e das séries se constituem de forma sincrônica e interdependente com a dos números.

A sincronia e interdependência das construções demonstram que a recomendação da realização de operações lógicas, como às vinculadas à teoria de conjuntos, de reunião de coleções, por exemplo, antes das relacionadas às operações numéricas, não possuem respaldo teórico na psicogenética.

> Precisemos unicamente que, no caso das operações multiplicativas, como no das adições, a composição qualitativa das classes não se constitui no plano operatório antes da dos números, mas ao mesmo tempo. Não existe uma fase da multiplicação lógica e uma fase da

> multiplicação aritmética: no decurso de uma primeira fase, nenhuma dessas composições é possível; no decorrer da segunda, ambas se esboçam num plano intuitivo, mas sem conclusão operatória e, no decurso da terceira, ambas se constituem em operações propriamente ditas, donde o sucesso simultâneo das diversas provas estudadas neste capítulo e a generalização imediata da multiplicação, assim que é descoberta. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.299)

3.6.1 A COMPOSIÇÃO ADITIVA

A composição aditiva, assim como todas as construções operatórias, evolui por três etapas. A presença de três etapas na evolução da composição aditiva deve-se, também, à construção da reversibilidade, uma vez que a adição é uma operação reversível. Todavia, ela não é de saída reversível, ao contrário, na primeira fase, a criança não consegue compreender que uma totalidade B, apesar de dissociada em duas partes A e A' continua a ser a mesma totalidade.

Graças à reversibilidade (que implica na operação inversa, a subtração) a adição está constituída não apenas quando as parcelas são reunidas num todo, mas, também, quando este todo é considerado como invariante, independentemente da disposição das partes.

É importante notar, todavia, que a quantidade de elementos das coleções envolvidas não desempenha papel algum nas transformações efetivadas (a menos de comparações das coleções), de modo que a quantificação presente é a intensiva e ainda não extensiva ou numérica.

Essa quantificação intensiva se tornará extensiva ou numérica somente quando os elementos dessas várias coleções forem concebidos como unidades simultaneamente homogêneas e seriáveis, assinalando, assim, a passagem da adição de classes para a adição numérica.

> Em resumo, cada subconjunto é concebido relativamente ao outro e ambos relativamente a sua soma: as relações em jogo formam, desde logo, um sistema operatório tal que o todo, tornado invariante, resulta de uma composição por adição das partes e estas, graças às subtrações e adições combinadas mantêm entre si relações univocamente determinadas. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.261)

Para estudar a composição aditiva de ordem numérica o caminho seguido por Piaget e Szeminska foi o de "prosseguir a análise da construção do número, ultrapassando os dados da colocação em correspondência, para estudar o papel do próprio mecanismo operatório aditivo" (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.254).

Com este objetivo, os pesquisadores empregaram, sucessivamente, três técnicas paralelas. A primeira buscava verificar se a criança é capaz de compreender que diferentes composições aditivas envolvendo as partes de um todo não alteram sua identidade. As composições aditivas utilizadas nas provas eram referentes ao todo 8 (oito) e suas diferentes representações: (4+4) = (1+7) = (2+6) = (3+5). Foram observados três tipos sucessivos de respostas.

Numa *primeira* etapa os conjuntos (7+1) e (4+4) não são concebidos como equivalentes; numa *segunda*, considerada intermediária, a igualdade entre os conjuntos é estabelecida mediante uma verificação empírica (correspondência ou contagem) e na *terceir*a a equivalência existe por composição ativa.

Os resultados das provas realizadas segundo este primeiro método possibilitam verificar que para as crianças pequenas o valor cardinal de um número não é o resultado imediato de uma composição aditiva, mas, é constituído por um todo intuitivo.

A segunda técnica foi aplicada para completar a análise da composição aditiva mediante o emprego espontâneo, por parte das crianças, das operações de igualização de diferenças.

As provas referentes à segunda técnica objetivavam uma melhor análise (e complementação) da igualização das diferenças, o que equivale a estudar a solidariedade entre a operação direta (adição) e sua inversa (subtração). Nesta técnica a ênfase está em buscar a igualdade de partes desiguais sem referência à totalidade como tal (a criança é livre para usá-la ou não).

Para isso, apresentavam-se à criança duas coleções desiguais de fichas (8 e 14) e lhe era solicitado que as transformasse em duas coleções iguais. As etapas da evolução da igualização das partes são as mesmas da equivalência cardinal: avaliação global; correspondência qualitativa e correspondência biunívoca e recíproca.

Os resultados de uma maneira geral, são os seguintes: numa *primeira* fase as crianças não relacionam as duas coleções entre si, avaliando-as globalmente, ou seja, não entendem que "acrescentando fichas ao monte pequeno, elas por isso mesmo as retiram do grande". A criança apenas retira fichas do monte maior (14) e as acrescenta ao menor (8), comparando-as perceptualmente e não compreende a composição necessária entre as operações realizadas.

Na *segunda* fase a criança conclui a tarefa mediante a igualização das figuras por sucessivos tateios empíricos. Ela "descobre" esse equilíbrio, porém, somente no plano intuitivo, com a composição de figuras construídas espontaneamente por ela.

Finalmente, durante a *terceira* fase, a criança é capaz de manejar operatoriamente as transferências e, logo, de uma reversibilidade. Em outras palavras, "criança procede por via de correspondência e composição operatórias". (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.256)

O terceiro método empregado foi o da repartição em duas quantidades iguais e somente complementa os anteriores. Apresentou-se um monte de fichas para a criança e lhe era solicitado que construísse duas partes de modo que cada uma tivesse o "mesmo tanto" que a outra. Os resultados obtidos indicam fases paralelas às anteriores.

Pode parecer estranho uma prova que analise a composição aditiva por meio da "repartição" por esta última parecer ser originária da composição multiplicativa, todavia, qualquer todo é constituído por suas duas metades, sendo a igualdade A+A = 2A possível de ser estudada enquanto aditiva.

O objetivo pretendido pelos pesquisadores era verificar o processo utilizado pela criança para transformar a operação lógica (intuitiva ou operatória) B = A + A', numa operação numérica A_1+A_2 = 2A, o que equivale a estudar como a criança consegue construir duas coleções iguais, tendo como ponto de partida a sua soma.

Na *primeira* fase a criança não concebe como iguais o todo e a soma das partes e, tampouco, a equivalência durável entre as duas metades (mesmo se as constitui por distribuição termo a termo) porque seus julgamentos se fundam na percepção da avaliação global.

Na fase *intermediária* a composição qualitativa das figuras constituídas após a distribuição termo a termo entre as duas coleções permite a repartição em duas metades iguais, porém, sem equivalência durável, de modo que não se pode "falar ainda de composição aditiva, mas, unicamente de comparações, reuniões ou dissociações intuitivas" (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.2717).

A *terceira* fase caracteriza-se pela composição aditiva propriamente dita, em função da igualdade durável das metades consideradas como unidades e da equivalência de sua soma com o todo inicial.

Este mesmo mecanismo proporciona a compreensão da passagem da composição aditiva à composição multiplicativa, pois a multiplicação de números inteiros positivos ***n***x***m*** é uma eqüidistribuição de ***n*** coleções de ***m*** termos ou ***m*** coleções de ***n*** termos biunivocamente correspondentes entre si, o que equivale à uma adição de ***n*** parcelas, cada constituída por ***m*** termos ou vice-versa.

Em resumo, as composições aditivas e multiplicativas (lógicas ou numéricas) são solidárias entre si, isto é, a construção psicológica de uma implica a da outra.

3.6.2 A COMPOSIÇÃO MULTIPLICATIVA

A técnica utilizada para o estudo das composições multiplicativas é um prolongamento das experiências realizadas anteriormente com flores e jarros e ovos e oveiros. Para isso, após a criança haver estabelecido a correspondência termo a termo entre uma coleção de flores brancas F_1 e uma coleção de jarros J_1, o experimentador solicitava que repetisse a mesma ação com J_1 e uma nova coleção de flores amarelas F_2, com o intuito de verificar se a criança compreendeu que: se $F_1 = J_1$ e $F_2 = J_1$, então $F_1 = F_2$.

A seguir era solicitado para a criança estabelecer as correspondências de modo a colocar um número igual de flores em cada jarro J. Após estar resolvida esta questão os experimentadores colocavam o seguinte problema:

> [...] se, em vez de colocar duas flores em cada jarra, desejar-se colocá-las em pequenos tubos que só podem, cada um conter apenas uma só, quantos desses recipientes serão precisos para todas as flores (naturalmente tira-se estas

> para se deixar sobre a mesa apenas as jarras iniciais J_1, donde a solução $2J = J_1 + J_2$, em que J_2 = os tubos postos em correspondência com J_1)? (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.278)

Os objetivos buscados eram estudar a correspondência biunívoca entre diversas coleções e a passagem das relações de equivalência para a multiplicação aritmética.

De fato, do ponto de vista psicológico, estabelecer a correspondência biunívoca e recíproca entre duas ou mais coleções implica, implicitamente, numa multiplicação e, estabelecê-la entre diversas coleções proporciona ao sujeito a conscientização dessa multiplicação, de maneira a transformá-la numa multiplicação explícita.

Na constituição da correspondência entre mais de duas coleções o que é determinante é a transitividade da relação de igualdade, ou seja, se X = Y e Y = Z, então X = Z, quaisquer que sejam X, Y e Z. Esta proposição se aplica, indeterminadamente, a quaisquer conteúdos e traduz tanto a equivalência de três classes quanto a coordenação de duas relações, sendo válida seja no domínio da lógica qualitativa, seja na realidade matemática.

Embora seja independente do conteúdo (números, superfícies, pesos, classes, relações, etc.) quando de seu acabamento, a construção da transitividade não se elabora, desde o início, como uma estrutura formal, ao contrário, necessita de tantas aquisições quantos forem os diferentes conteúdos aos quais seja aplicada.

De maneira geral as crianças que não conseguem estabelecer a correspondência biunívoca e recíproca, também fracassam na composição de relações de equivalência. De certa forma, este fato é natural, pois para compreender a composição é necessário compreender a própria equivalência. O interessante é que ao serem capazes de estabelecer a equivalência durável entre duas coleções, as crianças também estão aptas a compor as relações recém descobertas, mostrando que "as operações de ordem multiplicativa em jogo na própria correspondência são, assim que constituídas, explicitadas sob a forma de multiplicação propriamente dita" (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.281).

3.6.3 A CORRESPONDÊNCIA MÚLTIPLA E A MULTIPLICAÇÃO NUMÉRICA

Por ser correlativa da correspondência simples, a composição das relações de equivalência que engendra a multiplicação, evolui pelas mesmas três fases: a do fracasso (da própria correspondência e da composição); a da correspondência termo a termo sem equivalência durável e a da correspondência e coordenação imediatas.

Apenas uma observação em relação às crianças da *primeira* fase: o poder que possuem de “se adaptar às palavras e às noções coletivas inerentes à linguagem ambiente”, isto é, mesmo sem estabelecer a correspondência entre as coleções de flores (10) e de jarros (10), sabem contar estas flores, não sendo tal contagem, todavia, um método confiável para os sujeitos basearem seus julgamentos (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.286).

As crianças da *segunda* fase já são capazes de estabelecer a correspondência termo a termo sem equivalência durável. Também apresentam um esboço de composição, ainda que auxiliada pela intuição e não generalizada operatoriamente.

Em resumo, mesmo tendo estabelecido que X = Y e Y = Z, os sujeitos não são capazes de concluir daí que X = Z quando os conjuntos não são mais percebidos visualmente. O mesmo acontece quando os conjuntos permanecem visíveis, porém com configurações diferentes e apenas estabelecem a igualdade X = Z, quando fundada numa constatação visual e não mediante uma composição operatória.

Orientada somente pela intuição a criança compara diretamente X e Z, sem recorrer a Y para compô-los, sendo assim induzida a oscilações. Graças às sugestões contidas nas questões formuladas pelos examinadores, o sujeito começa a postular equivalências duráveis entre X e Y e, depois entre Y e Z, com as flutuações de julgamento ficando inaceitáveis de onde emerge um início de constância. “É então que a invariância das totalidades e a composição das relações de equivalência surgem assim simultaneamente como os dois aspectos da mesma realidade” (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.289).

Uma vez constituída a composição das equivalências, esta se generaliza sob a forma de correspondência biunívoca e recíproca para um número ***n*** de coleções e de multiplicação numérica, obedecendo às mesmas etapas da construção da correspondência operatória.

Na *primeira* fase (avaliação global) não existe sequer a correspondência termo a termo entre duas coleções e, portanto, a criança não é também capaz de compreender que duas coleções são correspondentes entre si quando correspondem a uma terceira e, portanto, não consegue efetuar multiplicações numéricas (nem mesmo duplicações).

Na fase *intermediária* a criança consegue resolver o problema não de maneira operatória, mas por tentativas fundadas na intuição. No presente caso (necessidade da duplicação dos jarros para colocar uma flor em cada um) as crianças começam a resolver a questão da duplicação por tateios e chegam ao resultado pela correspondência. Aos poucos, vão tornando-a múltipla, mas não ainda de forma operatória e abstrata.

> No decorrer da primeira fase, a criança se limita a sentir que, se se faz corresponder simultaneamente (X+Z) a Y (quando X = Y = Z), há entre (X+Z) e Y mais que uma simples correspondência termo a termo: desde logo, para encontrar tantos potes V quantas flores (X+Z) há, contenta-se em acrescentar alguns elementos aos de V, que colocou em correspondência termo a termo com os Y. Ao contrário, quando as crianças do presente nível começam por uma correspondência termo a termo entre os V e os Y e apercebem-se que os V assim preparados não corresponderão a todas as flores (X+Z); passam então, imediatamente, do sistema '1 por 1' para o sistema '2 por 1'. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.294)

É exatamente esta passagem do sistema "1 por 1" para o sistema "2 por 1" que reside o progresso de uma fase para outra, em direção à multiplicação, pois a criança passa, de ***n***V a (***n***+***n***)V, partindo da constatação de que ***n***Y← →***n***2V, sem conceber, diretamente, a igualdade ***n***+***n*** = 2***n*** porém, já postulando (***n***+***n***)V e não (***n***+***n'***)V, com ***n'*** representando um incremento qualquer, como na primeira fase.

Todavia, esse progresso não é ainda suficiente para indicar que os sujeitos já são capazes da multiplicação propriamente dita, pois ainda não dominam a composição das relações de equivalência. Não chegam, também, numa primeira tentativa, à correspondência múltipla ao contrário, é só quando verificam a existência de um resíduo nas suas investidas para estabelecer a correspondência simples que concluem pela passagem de ***n*** para ***n***+***n***.

Finalmente, se a correspondência múltipla já fosse compreendida como uma relação multiplicativa, esta seria passível de generalização para 3***n***, 4***n*** ou 5***n***, o que não ocorre porque o sujeito não compreendeu ainda que 2***n*** = ***n***+***n*** e, mesmo a passagem de ***n*** para (***n***+***n***), se dá de forma empírica e, conseqüentemente, não generalizável.

A equivalência por correspondência biunívoca e recíproca é, então, uma equivalência de ordem multiplicativa (qualitativa). E, lembrando que, como já foi visto anteriormente, a equivalência aditiva é de ordem quantitativa, verifica-se a existência de uma variedade de formas de equivalência qualitativas ou numéricas.

A passagem da multiplicação de classes para a de números se efetiva mediante processo análogo ao da passagem da adição das classes à dos números.

É importante frisar que os pesquisadores aproveitaram o momento do "fechamento" dos estudos sobre as composições aditiva e multiplicativa de classes e números, para destacar, novamente, a estreita solidariedade de construção entre classes e números.

3.7 O NÚMERO E AS RELAÇÕES ASSIMÉTRICAS

O "relacionamento" entre números e séries (relações assimétricas) é completado por Piaget e Szeminska mediante a análise das composições aditiva e multiplicativa das relações assimétricas e suas ligações com o número. O "cenário" para tais estudos é o das relações entre quantidades contínuas, com as provas prolongando as de transvasamentos de líquidos.

Todos os resultados anteriormente obtidos acerca das composições aditiva e multiplicativa das relações que conduzem às dos números pressupõem, necessariamente, um *igualamento* das diferenças e, um dos propósitos destas provas, é analisar esta igualização "sob uma forma desenvolvida e generalizada: a da medida numérica elementar e, portanto, da medida comum e da constituição das unidades" (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.301).

Além disso, tal como aconteceu com as classes, aqui também acontece a interdependência e o sincronismo entre as composições aditiva e multiplicativa das séries e do número.

As provas realizadas objetivavam verificar inicialmente o desenvolvimento da medida e, depois, a composição das unidades numéricas. É importante especificar que, embora elementar, a construção de uma métrica repousa sempre sobre a composição das relações em jogo de forma que a opção de se examinar em separado as questões de medida e de composição atende apenas a critérios de clareza de exposição.

Para analisar a questão do desenvolvimento da medida foram formulados três problemas: o da conservação das quantidades; o da medida numérica espontânea e o da utilização de uma medida dada. As fases de evolução são as habituais.

A *primeira* sem conservação em função do primado da percepção e na qual a criança também não chega à noção de medida comum. Além disso, se lhe é apresentada uma medida, o sujeito não a leva em conta e continua avaliando globalmente.

As reações características desta fase deixam evidentes que enquanto não existe conservação de quantidades é impossível qualquer espécie de medida, pois quantidades não-conserváveis não são componíveis entre si.

> Se os termos pré-lógico ou pré-numérico possuem um sentido, é difícil não empregá-los para designar um comportamento no qual a impossibilidade da medida resulta de uma negação tão crua dos axiomas de equivalência. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.305)

Durante uma *segunda* fase a criança alcança algumas transformações embora sem generalização. Se instigada a medir, alcança parcialmente este objetivo, pois escolhe sempre “unidades” inadequadas e, mesmo se lhe é proposta uma unidade de medida para fundamentar seus julgamentos, não se liberta da percepção.

Em outras palavras, são reencontrados também, aqui, os caracteres gerais deste nível, que aparecem em todas as provas até então estudadas: um início de conservação, porém apenas no plano intuitivo e, portanto, não operatória. Por fim, quando da *terceira* fase, o sujeito é capaz de conservar e de medir com a utilização de unidades comuns, tudo acontecendo simultaneamente.

Pode-se concluir dos resultados anteriores que para medir é imprescindível uma lógica. De fato, medir significa, primeiramente, comparar quantidades que se conservam, é compor unidades e introduzi-las num sistema de equivalências.

Assim, o último estudo a ser realizado no livro *A gênese do número na criança*, objetiva analisar as composições lógicas e operatórias que engendram a medida, estudando: a coordenação das relações inversas; a transitividade das equivalências e, a composição aditiva e multiplicativa de ordem numérica que têm origem nessas relações.

As fases encontradas são: ausência de composição; início de composição (intuitiva e não operatória) e êxito em todas as composições elementares.

Durante a *primeira* fase cujo interesse reside em confirmar (como em todas as outras situações) a inexistência de estruturas "pré-formadas", os sujeitos são incapazes de qualquer composição, tanto lógica, quanto numérica.

A *segunda* fase ou fase intermediária é a mais interessante (em qualquer situação), pois possibilita a observação dos conflitos que conduzem, inevitavelmente, às construções em jogo, com o pensamento se libertando da percepção imediata e caminhando em direção à reversibilidade operatória. No caso específico, as crianças desta fase buscam coordenar as relações de altura e largura sem ainda utilizar as proporções e recorrendo à coordenação das equivalências (sem rigor dedutivo). Existe também um início de composição numérica (intuitiva), porém os julgamentos são contraditórios e presos à percepção.

Ultrapassados os conflitos, a *terceira* fase se caracteriza pela construção operatória da composição aditiva e multiplicativa das relações e dos números. Ao contrário das anteriores, nas quais o primado era da avaliação perceptiva em relação às composições, as crianças desta fase combinam as unidades de medida entre si, mediante uma igualização das diferenças e, novamente, evidenciando a interdependência das noções em jogo:

> [...] é no momento em que a criança se torna capaz de uma composição rigorosa das operações elementares da lógica das relações (adição e multiplicação das relações assimétricas) que obtém êxito também as provas de composição numérica, aditiva e multiplicativa ao mesmo tempo, quando essa composição versa sobre as mesmas relações. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.322)

3.8 A SÍNTESE DOS RESULTADOS

Uma primeira observação a ser feita é que na elaboração da própria conservação já está implícita a gênese de todas as composições, corroborando a afirmação dos autores contida no primeiro parágrafo da introdução do livro *A gênese do número na criança*: "todo conhecimento, seja ele de ordem científica ou se origine do simples senso comum, supõe um sistema, explícito ou implícito, de princípios de conservação". O pensamento aritmético e mais especificamente, o número, não constituem exceções (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.23).

Todavia, como na elaboração da conservação as composições (mesmo em sua gênese) não são percebidas pelo sujeito, com as provas realizadas eles são obrigados a refletir sobre elas, retirando-as de seu "estado virtual" e, conseqüentemente, tomando consciência delas.

Uma outra observação decorrente dos resultados encontrados é que as fases da construção da conservação (ou quantificação) e as do desenvolvimento das composições aditivas e multiplicativas sejam exatamente sincrônicas.

Os resultados obtidos anteriormente deixam evidente que as classes, as séries e os números, bem como a adição e a multiplicação das classes, das relações e dos números estão implícitos na construção de qualquer classe, qualquer relação e qualquer número.

Além disso, o processo envolvido em cada uma das construções culmina com o acabamento dos agrupamentos lógicos e dos grupos numéricos. E mais, cada uma destas estruturas foi construída mediante três etapas.

Durante uma *primeira* com a avaliação da criança fundamentada apenas sobre as qualidades (quantidade bruta) há total ausência de conservação, de composição de qualquer ordem (fechamento), de reversibilidade (elemento inverso), de equivalência (transitividade), de identidade (elemento neutro), de associatividade e, conseqüentemente, sem constituição de unidades numéricas. Portanto, não existe nem um arremedo de agrupamento lógico ou de grupo numérico.

A *segunda* fase se caracteriza pelo início de uma coordenação intuitiva, com as relações perceptivas começando a se coordenar não mais em totalidades globais. O sujeito começa a compreender (intuitiva e mesmo experimentalmente) a coordenação das relações inversas o que permite uma comparação entre dois termos embora ainda elementar, emergindo uma equivalência não durável de coleções e dando início à constituição das unidades numéricas.

> A conservação, a coordenação das relações inversas e das diretas surge, assim, necessariamente, apoiando-se umas nas outras. Por este próprio fato surgem, igualmente, certas igualdades numéricas, pois os termos equivalentes podem ser contados e colocados em correspondência com os outros e etc. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.325)

Entretanto, como a coordenação das relações não pode ser generalizada (por ser intuitiva) e não existe ainda um sistema de composições propriamente dito, a criança confia mais na percepção atual do que numa regra de composição.

É somente pela constituição do agrupamento aditivo das classes,[10] do agrupamento multiplicativo das relações assimétricas[11] e do "grupo" das adições e multiplicações numéricas, com a coordenação de todas as operações em jogo, numa totalidade fechada e reversível, tanto qualitativa, quanto quantitativamente, **que tudo se completa**, da conservação, às composições.

Enfim, quando é capaz de coordenar duas relações, a criança é capaz de conservar e vice-versa. Além disso, ao se tornar apta a estabelecer uma terceira equivalência a partir de duas outras (transitividade), a criança também é capaz de generalizar, o que constitui o acabamento dos agrupamentos lógicos. Com a igualização das diferenças, as totalidades lógicas se transformam em unidades e mediante a composição, tais unidades se transformam em números.

Por último, as operações com as classes são distintas das com as séries, pois as primeiras envolvem correspondências entre termos qualitativamente equivalentes enquanto que operar com séries significa corresponder termos não equivalentes. Porém, ao se igualar as diferenças, os termos das relações assimétricas se tornam equivalentes, de modo que é possível fundir num só todo operatório, as operações com as classes e com as séries e esta fusão, constitui as operações numéricas.

---

[10] Inclusão hierárquica.

[11] Seriação simultânea destas relações de acordo com n dimensões diferentes

Assim é possível verificar que, desde a gênese destes três elementos, até seu acabamento final (agrupamentos lógicos e grupo numérico), o número surge como síntese da classe e da série, ou das relações simétrica e assimétrica. Dito de outra forma, o número emerge da igualdade e da diferença, porém, num imbricamento constante, solidário e sincrônico demonstrando que a construção do número não se dá de forma linear.

3.9 Os "novos" (e velhos) resultados

Foram feitas duas opções para o desenvolvimento deste terceiro capítulo: uma a de que não seriam utilizados resultados oriundos de estudos de Piaget e seus colaboradores que fossem posteriores ao livro *A gênese do número na criança* e a outra, a de que o período analisado seria o mesmo escolhido por Piaget e Szeminska, o estádio pré-operatório.

Os sujeitos da pesquisa foram restritos a crianças do período intuitivo, não porque não existissem indicativos da presença do número em crianças mais jovens, mas, porque, toda análise metodológica necessita fixar "começos". Para não ficar remontando indefinidamente às origens, Piaget e Szeminska estabeleceram que os sujeitos de sua investigação devessem ser capazes de realizar tarefas inerentes às provas cognitivas programadas, limitando-os, então, ao período intuitivo ou pré-operatório.

Quanto à regressão genética da construção do número, as pesquisas se fixaram nos estádios onde é possível mostrar como as operações numéricas são preparadas pelas operações de classe e de relações e como estas constituem os agrupamentos por composições reversíveis de ações fundadas nas coordenações sensório-motoras. É claro que se pode remontar além e afirmar que tais coordenações resultam de coordenações orgânicas. Isto, porém, em nada contribui para a explicação do número, daí a razão de se estabelecer um limite para esta análise regressiva. O limite estabelecido no presente caso foi o período intuitivo, embora a primeira etapa da construção do número se encontre no sensório-motor, com as qualidades e quantidades fundidas e ainda não trabalhadas perceptualmente.

O período intuitivo caracteriza-se por um equilíbrio momentâneo e parcial entre acomodação e assimilação que, embora ainda imperfeito, tende a estabilizar-se com a interiorização das ações constituída pela representação intuitiva. Além disso, existe um domínio perfeito da linguagem que possibilita uma extensa gama de provas, segundo o procedimento geral de conversação livre, com a criança dirigida pelos problemas colocados, mas, alterando freqüentemente a rota, sempre que as respostas dos sujeitos assim o determinassem.

Quanto ao embasamento teórico se restringir à obra citada para evidenciar o caráter não linear da construção do número, esta opção foi feita, com a intenção de evidenciar que esta obra, sobre a qual se fundamentam as principais propostas metodológicas "piagetianas" para o ensino do número é suficiente para este fim. Os resultados nela contidos, desde que analisados em profundidade, não dão margem a interpretações outras que não a da construção solidária e sincrônica dos números, das classes e das séries.

Concluído este intento, é importante, todavia, acrescentar outros resultados das pesquisas de Piaget e seus colaboradores, que corroboram ou complementam os explicitados na obra em questão. A maioria destes resultados foi posterior a *A gênese do número na criança*, porém, são abordadas aqui, também, algumas considerações contidas no livro *O nascimento da inteligência na criança*, de publicação anterior.

Já ficou evidenciado que o número emerge como síntese das classes e das séries em torno dos 7 anos, porém, não é apenas a partir daí que existe o número. É fato que a sucessão dos números só é possível a partir dos 6 ou 7 anos, porque se apóia sobre os agrupamentos lógicos que não se encontram ainda suficientemente elaborados nos níveis anteriores, de forma a possibilitar a iteração da unidade. Isto é devido a que, apesar de já conhecer, mediante a linguagem (interação social) uma série de conceitos (palavras-número, por exemplo), a criança de idade inferior aos 6 ou 7 anos não sabe agrupar tais conceitos logicamente por composições reversíveis.

Em outras palavras, os conceitos de caráter extensivo e métrico se constituem de forma operatória quando existem agrupamentos lógicos (de caráter intensivo) sobre os quais podem apoiar-se.

> Estes agrupamentos intensivos não precedem, necessariamente, no tempo à sua quantificação extensiva, uma vez que esta quantificação pode efetuar-se imediatamente depois da constituição daqueles agrupamentos, ou seja, ambas construções intensiva e extensiva podem apoiar-se uma sobre a outra. (PIAGET, 1975, p.97).

Essa interdependência entre intensivo e extensivo ou entre qualitativo e quantitativo, entretanto, é anterior ao período pré-operatório, com a qualidade e a quantidade se apresentando como indissociáveis desde o período sensório-motor. Num esquema sensório-motor já é possível distinguir a compreensão (que se apóia na qualidade) da extensão (que implica a quantidade).

Assim, reunir objetos semelhantes é uma ação motora que consiste em introduzir alguma qualificação, enquanto que reunir *mais* ou *menos* objetos é uma quantificação desta ação. Sacudir um objeto é uma ação caracterizada por determinada qualidade, porém este objeto pode ser sacudido mais ou menos rapidamente, com maior ou menor intensidade, etc., e estas graduações da ação constituem quantidades inerentes às relações assimétricas (PIAGET, 1975).

J. Feldman (1985) evidenciou a importância do período sensório-motor para a construção do número ao relatar pesquisas com crianças com problemas motores que, embora possuindo a inteligência, os sentidos e a linguagem preservados, apresentam dificuldades na construção dos números, particularmente, no que se refere aos quantificadores. O autor apresenta, como uma das hipóteses para isso, a impossibilidade destas crianças, em reunir de forma motora (em seus braços, por exemplo), mais ou menos objetos; em sacudir um objeto com mais ou menos intensidade, etc., em suma, de realizar ações de quantificação motora que engendram os quantificadores.[12]

Piaget observou que a partir dos 3 meses, com as reações circulares secundárias, já é possível identificar os primeiros esboços de classes:

> Perceber um objeto como algo que é 'para sacolejar', 'para esfregar etc., é o equivalente funcional, de fato, da operação de classificação própria do pensamento conceitual. [...] Além disso, tal como a lógica das classes é correlativa da

[12] Piaget e Szeminska consideram os quantificadores como números primitivos.

> das ‘relações’, também os esquemas secundários implicam uma relacionação consciente das coisas entre si. (PIAGET, 1987, p.75)

Porém, as relações aqui se limitam a um mesmo esquema, são essencialmente práticas, globais e fenomenistas, não sendo, portanto, espaciais, causais, temporais, substanciais, etc. Em outras palavras, se resumem a uma simples relação prática entre o ato e o resultado observado, como por exemplo, a ação de puxar um cordão para sacudir uma argola.

Apesar de essencialmente empíricas, relações como a que foi estabelecida entre o ato de puxar o cordão e o resultado da argola agitada já constituem, do ponto de vista formal, o começo de um sistema diferente do de apenas classificar por semelhança (por exemplo, o cordão serve para puxar), mas, implica na relação entre puxar com “mais” ou “menos” intensidade de modo a obter “maior” ou “menor” agitação da argola, conduzindo “à descobertas de relações quantitativas distintas das simples comparações qualitativas inerentes à classificação como tal”.

Assim, “o esquema secundário constitui não só uma espécie de conceito ou de *classe prática*, mas, também, um sistema de relações que envolvem a própria quantidade”. (PIAGET, 1986, p.97).

A lógica está, portanto, contida *em germe*, desde os esquemas da atividade sensório-motora e perceptual do mesmo modo que, “desde as formas mais básicas da atividade mental, se observa uma espécie de enumeração intuitiva e perceptual que anuncia as coordenações ulteriores entre a classificação e a seriação”.

Essa enumeração já é, em sua forma primitiva, o “resultado de coordenações elementares entre esquemas classificatórios e de ordenação de caráter motor” (PIAGET, 1975, p.133).

Assim, podem ser consideradas como *classes* no sensório-motor as aplicações de um mesmo esquema a múltiplas situações, pois para isso é preciso que sejam percebidas as semelhanças entre estas situações com a presença das relações de diferenças ou semelhanças situadas na ação.

No sensório-motor, caracterizam-se como quantificações pré-numéricas as repetições acumulativas, por exemplo, como a imitação diversa, segundo a qual a criança é capaz de reproduzir 1-2 vezes ou 4-5 vezes, o mesmo movimento.

A criança pequena (assim como os pássaros, segundo pesquisa de Otto Köhler), pode discriminar coleções de dois a seis objetos bem antes da construção da sucessão operatória dos inteiros. Estes números são chamados de *intuitivos* ou *figurais*.

É interessante frisar que em *A gênese do número na criança* (1941), Piaget e Szeminska limitam a 3 o máximo discriminado pela criança do sensório-motor e a 4 ou 5 os números intuitivos, ao passo que na obra de 1960 (referência 1975, neste trabalho), o autor fala em 2 a 6, valores estes compatíveis com pesquisas mais atuais.

O "princípio" do número é encontrado, pois, nas ações mais elementares do sujeito, com a experiência sendo indispensável à criança (assim como o foi para o homem primitivo), para a construção do número e para a descoberta das relações aritméticas elementares. Porém, no caso do número, a relação do sujeito com o objeto é especial, pois na experiência "numérica" o objeto desempenha um papel de suporte da ação, uma vez que têm, para o sujeito, apenas o valor de índices perceptuais de sua ação de enumerar e não constituem elementos do número.

Um outro aspecto que merece ser destacado é que o número, em todos os níveis, não procede das ações particulares que caracterizariam um tipo especial entre outras, mas, sim, da coordenação de ações. Com efeito, reunir e ordenar não constituem ações específicas como puxar, empurrar, pesar, levantar, etc., mas, são ações que resultam da coordenação de outras ações.

Tais coordenações necessitam, em seus primórdios, de objetos para se exercer e se aplicar não significando, todavia, que sua estrutura proceda do objeto como tal, ao contrário:

> Constroem estas estruturas à medida em que se desenrola seu funcionamento, começando pelos ritmos orgânicos e psicobiológicos, continuando pelas regulações perceptuais e depois intuitivas e terminando pelas operações lógico-aritméticas: término concreto final deste processo de equilíbrio (e ponto de partida das formalizações posteriores), porém que culmina num processo de coordenação que se iniciou com a organização e a assimilação psicobiológica. (PIAGET, 1975, p.134)

A coordenação das ações não contém, de antemão, nem a lógica e nem o número, porém, como as operações lógico-aritméticas têm sua origem na abstração a partir da ação, as coordenações que as engendram são, ao mesmo tempo, construídas e reflexivas. Assim, tais coordenações constituem, em relação às operações lógico-aritméticas, um *a priori* funcional e não estrutural.

> Uma vez admitida esta espécie de *a priori* funcional que é a coordenação das ações do sujeito, as operações lógicas e numéricas se constroem ao mesmo tempo, por abstração da organização sensório-motora e por composições generalizadoras dos caracteres assim abstraídos, composições cada vez mais dinâmicas e reversíveis porque cada vez melhor equilibradas. (PIAGET, 1975, p.135)

É possível, desde os níveis mais elementares da ação, a presença da quantificação (número), em uma forma ainda primitiva, mas suficiente para deixar claro que as estruturas lógicas não são concluídas, para só depois emergir a do número, mas, que as três estruturas, classe, série e número desenvolvem-se sincronicamente.

A propósito desta última informação, Piaget, Gréco e Grize pesquisaram, de 1958 a 1960, explicitamente, as relações entre classes, séries e números, pois, a análise da construção destas três estruturas, de forma isolada, apontou que cada uma delas evoluiu por três etapas. Seria legítimo, então, verificar se tais etapas eram síncronas e solidárias. Os resultados comprovaram a hipótese.

Assim, as etapas de evolução da classificação: coleções figurais, coleções não-figurais e inclusão hierárquica; da seriação: ordenação por elementos (2 a 2) e não total; seriação empírica e seriação operatória e do número: ausência de correspondência biunívoca, correspondência sem conservação da equivalência e correspondência operatória evoluem de maneira solidária e simultânea.

Em outras palavras, se uma criança ainda classifica mediante coleções figurais, a sua seriação é por elementos (dois a dois) e não estabelece correspondência biunívoca entre duas coleções.

Além destes aspectos foram pesquisados muitos outros, complementando, com a obra *Problèmes de la construction du nombre* e mais duas outras, *Structures numériques élémentaires* e *Epistemologie mathématique et Psycologie* e ainda, com a

Introduction a la épistemologie génetique – la pensée mathématique, os estudos acerca da construção do número.

E, mais, pesquisadores como J. M. Hyde e J. Goodnow, controlaram as fases descritas por Piaget e Szeminska, repetindo as provas realizadas, o primeiro, com crianças árabes, indianas, somális e inglesas e, o segundo, com crianças chinesas, sendo encontrados nestas e naquelas, resultados análogos e praticamente nas mesmas idades que os obtidos em Genebra. Ving-Bang, por outro lado, padronizou os experimentos realizados por Piaget e Szeminska.

Os pesquisadores do Centro Internacional de Epistemologia Genética realizaram diversas pesquisas, com um leque de questões, como o estabelecimento das relações entre o número, a classe e a série; a análise da especificidade (ou não) do número; a importância da recorrência; a controvérsia de Russell e Poincaré; a formalização da concepção piagetiana de número e sua compatibilidade em relação à teoria dos números, ou, ainda, as relações entre a psicologia da aprendizagem e o ponto de vista operatório, etc.

É importante que, todos os resultados vieram ampliar, complementar ou corroborar os já descritos em *A gênese do número na criança*, sendo que somente os obtidos por Gréco, em seu trabalho *"Quantité et Quotité, nouvelles recherches sur la correspondance terme-à- terme et la conservation des ensembles"*, publicado, em 1962, no vol. XIII dos Études d'épistémolgie génétique, os altera, (complementando).

São abordados aqui, apenas os "novos" resultados que se relacionam diretamente com os objetivos deste trabalho, isto é, os que estabelecem as relações entre série, classe e número e os que relacionam quotidade e quantidade.

Os resultados anteriores davam conta de que a evolução da noção de número inteiro passa, de um nível essencialmente figural aos níveis operatórios, o mesmo acontecendo com o desenvolvimento das classes e das séries. Por outro lado, as análises da conexidade numérica e da comutatividade demonstraram que, as estruturações do número demoram muito tempo antes de se libertarem de limitações análogas às dos agrupamentos qualitativos como, por exemplo, composições contíguas sem inferências à distância.

Assim, é possível, então, detectar, diversas indiferenciações (particularmente nos primórdios), entre números, classes e relações assimétricas e são exatamente estas indiferenciações que possibilitam estabelecer as relações cronológicas entre as três diferentes etapas de evolução e as ações ou interações entre as três espécies de estruturas.

Do ponto de vista cronológico, os resultados encontrados nas novas pesquisas de Piaget e seus colaboradores são notáveis:

> [...] o número não é construído antes das classes e das relações e nem após elas (isto é, após sua aparição ou após sua estruturação em agrupamento), porém, todos os três são construídos juntos, por etapas progressivas e sucedendo-se sincronicamente, pelas mesmas etapas de estruturação. É assim que já se encontram igualizações numéricas momentâneas por correspondência ótica ao nível onde as classificações procedem por coleções figurais e onde as seriações apresentam as estruturas análogas, enquanto que as correspondências operatórias se constituem no mesmo nível das classificações e das seriações operatórias (com avanços e recuos de uns e de outros). (PIAGET, 1960, p.63)

Quanto às ações ou interações entre classes, séries e números nos níveis operatórios (uma vez constituídas as três estruturas), não foram encontrados resultados que comprovassem a existência de ações diretas entre as três estruturas, o que, por outro lado, é testemunhado nos níveis pré-operatórios, em função das indiferenciações entre elas.

> A análise genética no total (e que trata destas indiferenciações gerais ou especiais) parece demonstrar que as estruturas numéricas são proporcionalmente menos autônomas quanto mais se remonta em sua formação, embora sejam já encontrados, em todos os níveis (inclusive sensório-motor) os pré-números tanto quanto as pré-classes ou as pré-relações [...]. (PIAGET, 1960, p.64)

Em função de que a síntese que engendra o número é progressiva, com indiferenciação relativa e síntese incompleta nos níveis elementares seguida por uma diferenciação gradual e culminando com a síntese propriamente dita. Estas indiferenciações demonstram os desenvolvimentos solidários, interdependentes e com trocas de apoios, das três diferentes estruturas (PIAGET, 1960).

Enfim, se ainda pairassem dúvidas quanto à construção não linear do número e das implicações recíprocas entre as três estruturas durante seu desenvolvimento, ao final das justificações apresentadas, fundamentadas no livro *A gênese do número na criança*, os “novos” e “velhos” resultados abordados dirimem quaisquer equívocos.

Encerrando esta análise acerca dos “novos” (e velhos) resultados, comentamos os obtidos por P. Gréco e A. Morf, e apresentados no *Structures numériques élémentaires*, de 1962, acerca das novas pesquisas realizadas por Gréco sobre a correspondência termo a termo e a conservação de conjuntos, que levaram ao estabelecimento da diferença entre *quantidade* e *quotidade*.

As provas que mereceram a atenção de Gréco foram as referentes à conservação ou não do número, a partir da colocação de duas fileiras de fichas (7 a 10 vermelhas e 7 a 10 azuis), para serem colocadas, pela criança, em correspondência ótica. De modo mais específico, são apresentadas à criança, de 7 a 10 fichas azuis bem alinhadas (com as fichas estando dispostas bem próximas uma da outra) e se solicita à criança que coloque uma outra fileira de fichas vermelhas, com o “mesmo tanto”. Foram encontradas quatro fases, uma a mais que Piaget e Szeminska, com a fase determinada por Gréco podendo ser situada entre a segunda e a terceira fase descritas em *A gênese do número na criança*. A *nova* fase foi admitida por Piaget, conforme consta do prefácio da terceira edição francesa de sua obra principal sobre o tema, prefácio este, datado de maio de 1964:

> [...] as fases sucessivas são então as seguintes: 1) a criança constrói uma fileira do mesmo comprimento, mas sem correspondência termo a termo; 2) ela consegue uma correspondência ótica exata, mas, se se espaça um pouco os elementos de uma das fileiras, a criança acredita que a fileira mais comprida adquire, por este fato, um número superior (8 em vez de 7, etc.); 3) na mesma situação, a criança pensa que o número se conserva mas que a quantidade aumenta (conservação da quotidade, mas não ainda da quantidade), com o nome numérico, pois, não sendo, ainda, mais que um meio de individualizar os elementos, mas sem que a quantidade total seja concebida como igual à soma das partes; 4) na mesma situação, há, daí por diante, conservação tanto da quantidade como da quotidade. (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.19)

Quando estudamos os aspectos cardinal e ordinal do número, já havíamos destacado a importância da contagem, pois esta interfere, diretamente, na constituição do aspecto ordinal, uma vez que a posição de um número na seqüência numérica depende de quantos números existam antes dele. Em outras palavras, a contagem é importante para que a seriação se torne operatória.

A questão da *quotidade* não altera a interdependência das classes, séries e números, mas, permite destacar melhor o papel da contagem nessa construção, particularmente, no que se refere à classificação.

De fato, quando do estudo da composição aditiva das classes, nas situações em que uma classe podia ser designada e delimitada por uma palavra ou combinação de palavras (meninos, meninas e crianças, por exemplo), os sujeitos apresentavam mais facilidade e melhores resultados na solução dos problemas de inclusão hierárquica. Em outras palavras, as dificuldades continuam existindo, mas a criança “lá chega, mais cedo ou mais tarde, graças ao sistema das próprias palavras”. Esse fato, associado à *quotidade*, faz com que seja legítimo pensar que a contagem, permitindo designar coleções por palavras-números, possa colaborar, efetivamente, a partir da segunda fase, (correspondência sem equivalência durável), com a construção do conceito de número (PIAGET; SZEMINSKA, 1981, p.229).

Assim, de posse da *quotidade*, a criança já é capaz de denominar numericamente uma coleção; por outro lado, coleções definidas e delimitadas por palavras que se organizam num sistema hierarquizado e incluídas umas nas outras, facilitam a compreensão da inclusão hierárquica das classes. Ora, a seqüência de palavras-número utilizadas na contagem constitui um sistema deste tipo e, se a criança for levada a refletir sobre isto, quando da contagem, esta última pode, a partir da constituição da quotidade, representar um salto qualitativo em direção à construção do número na criança.

Estas últimas considerações deixam evidente, que é possível, ao contrário do que propõem as propostas metodológicas “piagetianas”, justificar atividades de contagem, antes da constituição do número enquanto estrutura acabada recorrendo-se à teoria estabelecida por Piaget e seus colaboradores. Dessa forma, as propostas atuais que defendem o uso da contagem no trabalho pedagógico com o número, não estão “além de Piaget” e, sim, eventualmente, o pressupõem, numa compreensão mais totalizante e dinâmica da teoria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Milênios foram transcorridos desde que os primeiros hominídeos começaram a fazer uso do número até que esta fantástica ferramenta matemática tivesse sua natureza específica investigada sistemática e efetivamente, o que só aconteceu a partir do século XIX. Pitágoras, na Grécia Antiga, e Kronecker, no século XIX, podem ser considerados precursores dessa investigação, porém, tanto um, como o outro, estabeleceu, como “divina” a natureza dos números inteiros, o que, evidentemente, impossibilitou maiores aprofundamentos. O questionamento acerca da natureza do número desencadeou a famosa “crise dos fundamentos” da qual originaram as três principais correntes do pensamento matemático: o *logicismo*, o *intuicionismo* e o *formalismo*, com as duas primeiras apresentando definições antagônicas para o número.

Não foram, contudo, os matemáticos os únicos a se preocuparem com a natureza do número. Filósofos, lógicos e psicólogos também se debruçaram sobre o problema, instaurando um verdadeiro “caos” teórico. Porém, nenhuma das soluções apresentadas estava isenta de contestações.

Tal situação, com certeza, tornava a questão interessante do ponto de vista epistemológico, justificando uma análise genética que foi realizada, a partir da segunda metade da década de 1930, por Jean Piaget e Alina Szeminska.

Em 1941 Piaget e Szeminska publicaram *La gènese du nombre chez l’enfant*, livro que constituiu um divisor de águas no que se refere ao ensino do número e a repercussão foi tanta que fez com que não apenas a maneira de se ensinar número fosse questionada, mas, inclusive, se tal ensino era possível. E isso, apesar da questão do *ensino do número* ter passado ao largo dos motivos que impulsionaram os pesquisadores.

Os resultados das pesquisas de Piaget e Szeminska conduziram à definição de número como síntese da classificação e da seriação, porém, irredutível a qualquer uma destas operações, caracterizando-se, portanto, como um *tertium* entre as definições do logicismo de Russell e o intuicionismo de Poincaré.

Face essa “descoberta”, os educadores que estavam insatisfeitos com o ensino da matemática, procuraram suas possíveis aplicações pedagógicas ao ensino do número, o que, aliás, já estava sendo realizado, de uma maneira geral, com os demais resultados da epistemologia genética (basta citar, Hans Aebli, por exemplo).

É importante lembrar que, como tratamos no capítulo I, o ensino da matemática vem preocupando professores e cientistas desde o século XIX e que, a partir das décadas iniciais do século XX, intensificaram-se as discussões sobre o tema, discussões estas, que, não se encontram, absolutamente, esgotadas.

Os resultados de Piaget e Szeminska foram praticamente contemporâneos ao maior esforço mundial realizado na tentativa de se resolver o descontentamento reinante em relação ao ensino da matemática: o movimento renovador ou *matemática moderna* que desencadeou uma grande reforma nesse ensino como um todo, em especial, no de número.

Anteriormente à reforma, a ênfase estava na transmissão social do conceito de número, admitindo-o como algo pré-existente, repetindo-se, exaustivamente, a seqüência numérica, com vistas à memorização. Após 1970, a ênfase se deslocou para atividades de caráter lógico, particularmente, as de classificação e de correspondência termo a termo, atividades estas, que praticamente repetiam as realizadas nas experiências de Piaget e Szeminska (que não possuíam a menor intenção pedagógica). De certa forma, o objetivo para se ensinar números parece ter se transformado na preparação do aluno para realizar com êxito as provas descritas no livro *A gênese do número na criança.*

A matemática admitia, naquela época (e ainda hoje), as definições russelianas de números cardinal e ordinal e utilizava bijeções para determinar a cardinalidade de conjuntos e assim, na definição *matemática* de número estavam envolvidos os mesmos elementos da definição piagetiana: as classes e as séries.

Como a *matemática moderna* objetivava aproximar o saber ensinado na escola do saber desenvolvido pela ciência matemática, o fato da definição *matemática* e da definição *piagetiana* de número envolverem os mesmos elementos, proporcionava um respaldo de natureza, digamos, psico-pedagógica para um *novo* ensino do número.

A partir de então, em nome de uma estreita aproximação entre a matemática moderna e a teoria piagetiana, as atividades lógicas foram consideradas fundamentais à construção do número. As diferenças entre as definições, como por exemplo, o fato da definição matemática conceber os aspectos cardinal e ordinal do número como independentes e da definição piagetiana afirmar a indissociabilidade destes, parece não ter sido levado em conta.

Ainda, em função da interpretação equivocada de uma construção hierárquica e linear do número, as classes e séries foram assumidas como integrantes essenciais de uma etapa anterior ao advento do número e, portanto, *pré-numérica*. Ao ser admitida a existência de uma etapa eminentemente lógica anterior ao número, não seriam pertinentes atividades de caráter numérico, em particular a contagem, que, careceria totalmente de significado antes que a *síntese* das classes e séries estivesse completada.

Já demonstramos que essa é uma interpretação equivocada da teoria de Piaget sobre a construção do número, uma vez que uma leitura mais atenta constata que esta se processa solidária e sincronicamente com a das classes e das séries.

Não existe, portanto, nos resultados das pesquisas piagetianas nada que indique a presença de um estágio eminentemente lógico antecedendo ao numérico. Ainda mais, o número não existe somente a partir da síntese, pois, desde o período sensório-motor, a partir das reações circulares secundárias, já é possível perceber a presença de quantificação e, portanto, do número, primitivo, é verdade, mas, número.

Em resumo, o privilégio outorgado nas propostas educativas às atividades de classificação, de seriação e de estabelecimento de correspondências termo a termo não é passível de ser justificado a partir dos estudos de Piaget e Szeminska.

Recentemente, a ausência de atividades numéricas ou, pelo menos, a de ênfase nelas, na educação infantil está sendo questionada por diversos estudiosos que acreditam e defendem que tais atividades podem e devem estar presentes neste nível de ensino, fundamentados em pesquisas que evidenciaram a importância da contagem no desenvolvimento da noção de número na criança. Os resultados dessas pesquisas produziram questionamentos à teoria piagetiana, com críticas como, por exemplo, a de que Piaget e Szeminska *relegaram* a contagem a um segundo plano, por *desprezarem* os conhecimentos decorrentes da interação social ou, ainda, conforme estabelecido no capítulo I, que as recentes pesquisas realizadas estariam "além de Piaget", ultrapassando-o, portanto.

Sendo a contagem um conhecimento com características sociais, um "componente verbal" do número, existe um *algo* mais embutido na crítica ao alegado *desprezo* dispensado pelos pesquisadores ao papel da contagem na construção do número. O que parece é que se pretende retomar, em novo cenário, a antiga crítica endereçada à epistemologia genética sobre o suposto descuido com o fator social na construção do conhecimento.

O que desperta a curiosidade é que nenhum dos pesquisadores procurou verificar se suas premissas eram verdadeiras, se *realmente* Piaget e Szeminska afirmam que o papel desempenhado pela contagem na construção do número é secundário e, mais, se o *banimento* dos números dos currículos infantis justifica-se pela teoria piagetiana.

É fato que a responsabilidade sobre a reforma do ensino de matemática realizada em 1970 pode ser atribuída aos resultados de Piaget, pois estes deixaram evidente que o ensino, particularmente o do número, tal como era realizado, era ineficaz. O que não pode ser, todavia, imputado aos estudos de Piaget e seus colaboradores, é como tal reforma foi realizada e, menos ainda, a responsabilidade pelo privilégio outorgado às atividades lógicas em detrimento das atividades numéricas na educação infantil.

Todavia, o que acontece é que, a maioria dos pesquisadores não apenas atribui a Piaget a "responsabilidade" pelo ensino do número pós reforma de 1970, como também postula que, se Piaget e Szeminska minimizaram o papel da contagem, o fizeram, entre outras razões, por não considerarem o conhecimento anterior da criança. Ou ainda, (e esta justificativa é a mais freqüente), por não valorizarem a contribuição da interação social na construção dos conhecimentos.

Os fatos constatados, sobretudo no capítulo III, mostram que tais interpretações não são verdadeiras. Ficou evidente, no decurso daquele capítulo, que não existe uma fase anterior à organização numérica e nem um *pré-requisito* necessário para a construção do número, pois, mesmo a conservação de quantidade, tantas vezes invocada como necessariamente antecedendo ao número, se constitui, segundo o que as pesquisas piagetianas demonstraram, ao mesmo tempo em que acontece a própria construção da quantidade.

Além disso, apenas do fato de Piaget e Szeminska não terem privilegiado em suas pesquisas uma análise mais detalhada do papel desempenhado pela contagem na construção do número não se pode concluir que não o consideravam importante, ao contrário, o que se depreende é que este aspecto deveria ser estudado com maior profundidade. Isto foi, inclusive, comprovado pela seqüência das pesquisas realizadas pelos colaboradores do Centro Internacional de Epistemologia Genética, como P. Gréco, JB Grize e A. Morf, em particular.

Por outro lado, no que se refere ao papel da interação social no caso particular do número, é preciso ficar claro que o objetivo dos autores era estudar a psicogênese deste conceito e, portanto, tal questão não é explicitamente abordada no texto *A gênese do número na criança*. Entretanto, o conjunto da obra do mestre genebrino deixa claro que, embora a existência de um sujeito epistêmico, que constrói universais, esteja comprovada, a construção do conhecimento só é possível a partir das relações que o sujeito estabelece com os objetos, incluídas aí, as pessoas, as idéias, a cultura, etc., significando, obviamente, uma interação com o meio como um todo, inclusive o social.

Não se pode, também, desprezar importantes constatações que estão implícitas no livro em questão e que se referem à interação social, como no caso da análise das composições aditivas, com as crianças apresentando maior facilidade para incluir hierarquicamente em situações em que as classes em jogo podiam ser designadas e delimitadas por uma palavra ou sistemas de palavras, demonstrando que o *conhecimento social* colabora com as construções lógicas.

Como a seqüência de palavras-números utilizada na contagem constitui um sistema que representa *classes* embutidas, acredito que este é um ponto que poderia ser investigado mais profundamente, de modo a justificar, agora mediante a teoria piagetiana, a importância da contagem na construção do número. Uma outra situação que poderia, também demandar uma pesquisa específica, é a relatada quando das experiências acerca da correspondência ordinal, com as crianças que já apresentam uma equivalência cardinal não durável e, uma vez desfeita a correspondência visual, as crianças acreditam que podem restabelecer a equivalência *perdida*, recorrendo às categorias e que dependem do *cardinal*. Parece que neste momento, também, a contagem pode possibilitar um *salto* qualitativo. Estes, são, porém, possíveis temas para outras pesquisas.

Finalmente, uma vez estabelecido que considerar atividades lógicas como pré-requisitos exclusivos para a construção do número é uma utilização equivocada ou mesmo inadequada dos resultados de Piaget e Szeminska, significa abandonar tais atividades e se retornar ao ensino de número, tal como era anteriormente à reforma de 1970?

Seguindo o exemplo de Piaget, o que acredito ser recomendável, é o estabelecimento de um *tertium.*

Não se defende aqui, nem que a criança já tenha construído o número antes de usá-lo como preconizava a reforma e, nem que a criança deva usá-lo, exaustivamente antes de poder *pensar* o número, como fez a humanidade o que, em outras palavras, significa, nem a redução às atividades lógicas e nem às numéricas. Tanto as atividades lógicas, quanto as numéricas são importantes desde que realizadas adequadamente. O que é inegociável é a solidariedade entre elas, que deve ser procurada e evidenciada quando do desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Para não perderem o objetivo principal de serem efetuadas, que é o de possibilitar o desenvolvimento do pensamento lógico, as atividades de classificação e seriação necessitam, quando de sua realização, de materiais manipulativos e do estabelecimento de situações significativas. Também deve ser evitado que a essas atividades seja dado o *tratamento* de "conteúdos específicos" a serem trabalhados e passar a se *ensinar* denominações do tipo "o conjunto das maçãs", etc.

Assim, não devem ser enfatizadas atividades do tipo "contornar coleções de objetos", ou de "ligar" objetos qualitativamente homogêneos, como forma de comparar quantidades e outras similares, devendo ser privilegiadas as que se relacionem à descoberta de regularidades (que permitem, trabalhar, simultaneamente com diferenças e equivalências), ou de lei de formação de padrões geométricos (misturam qualidade e quantidade), por exemplo. Alguns textos nesta direção já foram publicados aqui no Brasil.[13]

Atividades numéricas e as de caráter lógico podem e devem ser realizadas sincronicamente. Isto significa levar em conta as competências numéricas iniciais dos alunos, lembrando que, mesmo sem ter completado a construção do número, a criança pode empregá-lo parcialmente e deve ser estimulada a usar seus conhecimentos e discutir com seus pares os resultados encontrados.

Esse *estimular*, porém, relaciona-se com o estabelecimento de situações significativas em que a utilização da contagem seja muito mais uma escolha da criança do que a necessidade de *obedecer* a alguma determinação prévia e arbitrária do professor.

Com esse enfoque, atividades em que se supõe que o número possa ser depreendido dos objetos, como se fosse um conhecimento de natureza física, não são importantes para o desenvolvimento da noção de número.

É verdade que a aprendizagem acontece o tempo todo e na maioria das situações, inclusive observando, imitando e repetindo as ações do professor, mesmo quando se trata de manipulação; porém, é a postura do professor, que não deve jamais se esquecer que tudo deve ser considerado na perspectiva operatória, para que a qualidade da aprendizagem seja melhorada.

É preciso que se tenha clareza de que o mecanismo envolvido na construção do conhecimento matemático, como já evidenciado no tópico *"a questão do formal e do fato no conhecimento matemático"* é a *abstração reflexionante* e, portanto, não envolve apenas os objetos como tais ou as próprias ações do sujeito no seu aspecto material, mas, sim, retira sua substância das coordenações de ações do sujeito, mesmo que ainda inconscientes.

Além disso, os objetos em si, particularmente no caso do número, são coadjuvantes do processo, uma vez que suas qualidades particulares são abstraídas para a constituição das unidades, atuando, portanto, apenas como índices perceptuais para o ato de contar, *não constituindo elementos do número*.

[13] Textos de Clarissa S. Golbert, de "Jogos Matemáticos - A Thurma" , por exemplo.

Assim, mesmo antes de estar completada a síntese, o *número é algo que se acrescenta aos objetos*[14]. Em resumo, o número, em absoluto, é extraído a partir dos objetos.

Enfim, muito mais do que um elenco de atividades que possam favorecer a construção do número, o que importa é a postura do professor, que deve ser um bom “perguntador”, ao invés de um bom “respondedor”; deve entender, que é muito mais fácil trabalhar a partir do que a criança já conhece [15] e, no caso específico do número, não descuidar diversas formas de representação, dos diferentes significados do número, decorrentes da interação social.

E isso porque, atividades formais que promovam a construção do número, como conceito abstrato (independente da representação), não são exatamente necessárias quando existe uma interação adequada entre a criança e o meio e é a forma como são trabalhadas que pode fazer a diferença. O mesmo não se pode dizer de crianças com algum tipo de deficiência, para quem, situações artificiais devem ser criadas, de modo a compensar a interação inadequada.

A questão da construção do número em sua face pedagógica não está, absolutamente, esgotada e é evidente que o que aqui se estabeleceu, foram alguns parâmetros, mesmo porque não era objetivo deste trabalho apresentar uma proposta metodológica. O que aqui se pretendeu, foi mostrar os usos inadequados dos resultados das pesquisas de Piaget e Szeminska, decorrentes de interpretações equivocadas, cujas conseqüências foram nocivas não apenas ao ensino da matemática, como também geraram críticas indevidas à teoria piagetiana.

Desfeitos os equívocos assinalados nas páginas anteriores, acredito que atividades lógicas e numéricas podem e devem conviver na Educação Infantil; que pesquisas acerca da importância do papel desempenhado pela contagem na construção do número, podem e devem continuar, uma vez que o tema não está esgotado.

O que não pode e não deve continuar acontecendo, são as críticas infundadas à teoria piagetiana, responsabilizando-a pelos

[14] A reunião 1 + 1 = 2, por exemplo, acrescenta a cada um dos objetos contados como unidades 1 e 1, a nova propriedade de constituir um todo 2.

[15] É mais fácil compreender inclusão de classes, quando se trata de meninos, meninas e crianças, do que contas brancas, castanhas e de madeira, por exemplo.

usos (e abusos) que dela fizeram e as afirmações de que os resultados encontrados nos estudos acerca da contagem estariam “além de Piaget”, quando, na verdade, tais pesquisas complementam e dinamizam a sólida base proporcionada pelo trabalho de Piaget e seus colaboradores.

REFERÊNCIAS

BABINI, J. *História sucinta de la matemática*. 3.ed., Madrid: ESPASA-CALPE, 1969.

BARKER, S. F. *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BARRETTO, E.S.S..(Org). *Os currículos do ensino fundamental para as escolas brasileiras*. 2.ed., Campinas, S.P: Autores Associados; São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2000. (Coleção Formação de Professores).

BASTOS, C. L. e KELLER, V.. *Aprendendo Lógica*. 6.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1998.

BECKER, O. *O pensamento matemático sua grandeza e seus limites*. São Paulo: Herder, 1965.

BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISHER, JP.(Org.).*Les chemins du nombre*. France; Presses Universitaires de Lille, 1991.

BOLL, M.; REINHART, J.. *Histoire de la logique.* Paris: Presses Universitaires de France, 1946.

BOYER, C. B.. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, L.A.S.. *Aplicações da teoria de Piaget ao ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1977.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. 2.ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

BRISSIAUD, R. *Como as crianças aprendem a calcular*. Lisboa: Instituto Piaget, 1989.

______. Un outil pour construire le nombre: les collections-témoins de doigts. In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISHER, JP.(Org.).*Les chemins du nombre*. France; Presses Universitaires de Lille, 1991. p. 59 -90.

BOURBAKI, N. La arquitetura de las matemáticas. In: Le Lionnais, F. (Org.) *Las grandes corrientes del pensamiento matematico.* Buenos Aires: Eudeba, 1962. p.36-49.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa; Sá da Costa, 1984.

CARVALHO, J.B.P. As propostas curriculares de matemática. In: BARRETTO, E.S.S..(Org). *Os currículos do ensino fundamental para as escolas brasileiras*. 2.ed. Campinas, S.P: Autores Associados; São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2000. p.91 -125. (Coleção Formação de Professores).

COSTA, M, A. *As idéias fundamentais em matemática e outros ensaios*. São Paulo: EDUSP, 1971.

COURANT, R.; ROBBINS, H.. *Qué es la matemática?* una exposición elemental de sus ideas y métodos. Madrid: Aguillar, 1967.

D' AUGUSTINE, C. H. *Métodos modernos para o ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1976.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação matemática:* da teoria à prática. 4.ed., Campinas, S.P: Papirus, 1998.

DAVIS, H.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

DOLLE, J.M. *Para compreender Jean Piaget*. Rio de Janeiro: Zahar, 1983.

DORNELLES, B.V. *Escrita e número*: relações iniciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

DUHALDE, M.E.; CUBERES, M.T.G. *Encontros iniciais com a matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

ERMEL, Institut National de Recherche Pédagogique. *Apprentissages numériques et résolution des problème:* cours préparatoire. Paris: Hatier, 1991.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, S.P: Unicamp, 1995.

FEHR, H. (ORG). *Educação matemática nas américas*: relatório da segunda conferência interamericana sobre Educação Matemática. Lima-Peru, 4-12 de dezembro, 1966. São Paulo: Nacional, 1969.

FELDMAN, J. *Aritmética para crianças com problemas de linguagem*. Rio de Janeiro: Enelivros, 1985.

FERREIRO, E.; GARCIA, R.. Presentacion de la edicion castellana. In PIAGET, J. *Introduccion a la epistemologia genética. 1. El pensamiento matemático*. Buenos Aires: PAIDOS, 1975.

FUSON, K. Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISHER, JP. (Org.). *Les chemins du nombre*. France; Presses Universitaires de Lille, 1991. p.159 – 179.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

GELMAN, R; MECK, E. Premiers principes et conceptions du nombre. In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISHER, JP (Org.).*Les chemins du nombre*. France: Presses Universitaires de Lille, 1991. p.211 – 233.

GOULART, I.B.. *Piaget:* experiências básicas para utilização pelo professor. 5.ed. Petrópolis, R.J: Vozes, 1989.

______ (Org.). *A educação na perspectiva construtivista:* reflexões de uma equipe interdisciplinar. Petrópolis, R.J: Vozes, 1998.

GRECO, P.; MORF, A. *Structures numériques élémentaires*. Paris: Presses Universitaires de France, 1962.

GRIZE, J.B. *Lógica.* In PIAGET, J. et al. Lógica e conhecimento científico. Minho. Portugal: BARCELOS, 1980, p.117-244.

HEGENBERG, L.. *Lógica:* o cálculo sentencial. 2.ed.rev.. São Paulo: EPU, 1977.

KANT, I.. *Sobre a pedagogia*. Piracicaba, S.P: Editora Unimep, 1996.

______. *Prolegômenos a toda metafísica futura*. Lisboa: Edições 70, 1988.

KAMII, C.. *A criança e o número*. 25.ed., Campinas, S.P: Papirus, 1998.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Rio de Janeiro: Globo, 1961.

KLINE, M.. *O fracasso da matemática moderna*. São Paulo: IBRASA, 1976.

______. *Mathematical though from ancient to modern times*. New York: Oxford Press University, 1972.

LOVELL, K.. *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

LUNGARZO, C. *O que é matemática*. São Paulo: Brasiliense, 1989.

MACHADO, N. J.. *Matemática e realidade*: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. São Paulo: Cortez, 1987.

MARÍAS, J. História de la filosofia. Madrid, Espanha: revista de Occidente, 1958.

MIORIM, M.A.. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MONTOYA, A. O. D.. *Piaget e a criança favelada:* epistemologia genética, diagnóstico e soluções. Petrópolis, RJ: Vozes, 1996.

PARRA, C. e SAIZ, I. (org). *Didática da matemática:* reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PASCAL, G. *O pensamento de Kant*. 5 ed. Petrópolis, RJ: 1996.

PIAGET, J. *Para onde vai a educação?* 7.ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1980.

______. *Ensaio de lógica operatória*. São Paulo: EDUSP, 1976.

______. *Sobre a Pedagogia*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

______. *Introduccion a la epistemologia genética. 1. El pensamiento matemático*. Buenos Aires: PAIDOS, 1975.

PIAGET, J. *Epistemologia genética*. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

______. *O nascimento da inteligência na criança*. 4.ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

______. *Abstração reflexionante*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

______. *O estruturalismo*. 3.ed., Rio de Janeiro: DIFEL, 1979.

______. et al. *Lógica e conhecimento científico*. Minho, Portugal: BARCELOS, 1980.

______. et al. *Problèmes de la construction du nombre*. Paris: Presses Universitaire de France, 1960.

______. et al. *La enseñanza de las matemáticas*. 3.ed. Madrid: Aguillar, 1968.

______; INHELDER, B. *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

______; GARCIA, R. *Psicogênese e história das ciências*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

______.; SZEMINSKA, A.. *A gênese do número na criança*. 3.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

______. *Psicologia e epistemologia*: por uma teoria do conhecimento. 1.ed. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

POINCARÉ, H *La sciense et l'hypothèse*. Paris: Flammarion, 1943.

_____. *O valor da ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z.. *Psicologia e epistemologia genética de Jean Piaget*. São Paulo: EPU, 1988.

RANGEL, A. C. S.. *Educação matemática e construção do número pela criança:* uma experiência em diversos contextos sócio-econômicos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

RUSSELL, B. *Introdução à filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. CENP - Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática:* 1º grau. 4.ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SILVA, C.P.. *A matemática no Brasil:* uma história do seu desenvolvimento. Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

STEFFE, L. P. Stades d'apprendissage dans la construction de la suíte dês nombres. In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISHER, JP.(Orgs.).*Les chemins du nombre*. France: Presses Universitaires de Lille, 1991. p.113-131.

SOPHIAN, C. Le nombre e sa genèse avant l'école primaire. In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISHER, JP.(Orgs.). *Les chemins du nombre*. France; Presses Universitaires de Lille, 1991. p.35-57.

STRUICK, D. *História concisa das matemáticas*. 2.ed., Lisboa: Gradiva, 1992.

TURNBULL, H. W. *Los grandes matematicos*. Barcelona, Espanha: CREDSA, 1968.

UNESCO. *La Matemática y la educación*. Oficina de ciências de la UNESCO Para a América Latina. Montevidéo, 1972.

WADSWORTH, B.. *Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau*. São Paulo: Pioneira, 1984.

Obras consultadas

AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: S.B.M., 1984.

BECKER, F. *Epistemologia do professor*: o cotidiano da escola. 6.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.

______. *Da ação à operação:* o caminho da aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire. 2.ed. Rio de Janeiro: DP&A/ Palmarinca, 1997.

DANTZIG, T. *Número*: a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DURANT, W. *A história da filosofia*. Rio de Janeiro: Nova Cultural, 1996. (Coleção Os Pensadores).

______. *História da civilização*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959, vol.III.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética:* uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. 3. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os Pensadores).

______. *Lógica e filosofia da linguagem*. São Paulo: Cultrix; EDUSP, 1978.

FREUDENTHAL, H. Major problems of mathematicis education. *Educational studies in mathematics*, v.12, n.2, p.133-150, maio, 1981.

HOGBEN, L. *Maravilhas da matemática*. 2. ed., Porto Alegre: Globo, 1970.

IFRAH, G. *História universal dos algarismos*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

GAULIN, C. *Tendências em métodos e meios para o ensino da matemática*. In: Nuevas Tendencias en la enseñanza de la matemática. v.III, UNESCO, 1973.

GOLBERT, C.S. *Jogos matemáticos*. 2 ed. Porto Alegre: Mediação, 2002. V. 1 e 2.

GUNDLACH, B. H. *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula:* números e numerais. São Paulo; Atual, 1992.

LERNER de ZUNINO, D... *A matemática na escola:* aqui e agora. 2.ed.

Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

LEITE, L.B. (Org). *Piaget e a escola de Genebra*. 3.ed. São Paulo: Cortez, 1995.

MACHADO, N. J.. *Matemática e língua materna*. São Paulo: Cortez, 1990.

MARTIN, G. *Kant:* ontologia e epistemologia. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba, 1961.

NOGUEIRA, C. M. I. *O desenvolvimento das noções matemáticas na criança e seu uso no contexto escolar:* o caso particular do número. 2002. 268 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, UNESP, Marília, 2002.

NÓVOA, A. (Org.) *Vidas de professores*. Porto: Porto Editora, 1996.

OGILVY, C.S. *Through the mathescope*. New York: Oxford University Press, 1956.

OMNÈS, R.. *Filosofia da ciência contemporânea*. São Paulo: EDUNESP, 1996. (Biblioteca Básica).

PARKER, S.F.. *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

PERRENOUD, P. *Práticas pedagógicas - profissão docente e formação:* perspectivas sociológicas. Lisboa: Dom Quixote, 1997.

PIAGET, J. *Psicologia de la inteligencia*. Buenos Aires: Siglo Viente, 1966.

______; BETH, E. W.. *Epistemologia matemática e psicologia*. Barcelona, Espanha: Crítica S.A, 1980.

POINCARÉ, H. *A ciência e a hipótese*. Brasília: Editora UnB, 1985.

QUINE, W. V.. *Filosofia da lógica*. Rio de Janeiro: Zahar, 1972.

ROLLER, D. H. D. A história da ciência e seu estudo nos Estados Unidos. In ROLLER, D. H. D. et al *Iniciação à história da ciência*. São Paulo: Cultrix, 1966, p.9-19

RUSSELL, B. *Principles of mathematics*. New York: Norton, 1938.

______. *Misticismo e lógica*. São Paulo: Nacional, 1957.

______.; Whitehead, A.N.. *Principia mathematica*. 2 ed. London: Cambridge University Press, 1968.

SCHLIEMANN, A; CARRAHER, D. (Orgs). *A compreensão dos conceitos aritméticos:* ensino e pesquisa. Campinas/S.P: Papirus, 1998.

SAWYER, W.W. *O encanto da matemática*. Lisboa: Ulisséia, s/d.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat*. 7.ed., Rio de Janeiro: Record, 2000.

UNESCO. *Educacion matemática en las américas* - V. Informe de la Quinta Conferência Interamenricana sobre Educación matemática. , Lima, Peru: UNESCO1979.

VERGANI, T. *Educação matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1993.

Sobre o Livro
Formato: 16 x 23 cm
Tipologia: gatineau
Papel: Polen soft 80g/m² (miolo)
Cartão Supremo 250g/m² (capa)

Impressão e acabamento

GRÁFICA DA FFC/MARÍLIA
(14) 3402-1305

Neste livro a autora revela que a grande descoberta teórica das pesquisas psicogenéticas e sócio-genéticas (história das idéias científicas) de Piaget foi, efetivamente, mostrar que o número operatório se constitui como resultado da síntese da lógica de classes e de séries, que a construção do número tem raízes na "lógica das ações" e não simplesmente na linguagem, como o positivismo afirmava e, portanto, a sua aquisição é um trabalho de criação e invenção do pensamento. Além disso, que a relação entre lógica e número não é linear, como interpretaram alguns comentadores e críticos da teoria Piagetiana.

Tal como este estudioso já anunciara na sua obra principal sobre o número, entre a lógica e a matemática existem relações de solidariedade, atividades de numeração que acontecem na coordenação dos esquemas sensório-motores da criança pré-verbal. O grande problema que coloca o pensamento de Piaget é que por meio de uma análise linear não se pode aferir uma realidade dinâmica e sistêmica, sobretudo quando se trata de explicar a vida e o pensamento, cuja evolução responde a processos dialéticos e relacionais. Em cada um dos capítulos deste livro, o leitor terá a oportunidade de constatar toda essa trajetória de descobertas e de análises críticas e fundamentadas.

Oficina Universitária

ISBN 978-85-6081-4