Compreensão da operação de multiplicação: estudo com referência na epistemologia genética

Sônia Bessa

Como citar: BESSA, Sônia. Compreensão da operação de multiplicação: estudo com referência na epistemologia genética. *In*: SILVA, Matheus Estevão Ferreira da; SOUSA, Lilian Pacchioni Pereira de; SARAVALI, Eliane Giachetto (org.). **As pesquisas piagetianas na educação:** contribuições do passado, desafios atuais e perspectivas futuras. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2024. p.165-190. DOI: https://doi.org/10.36311/2024.978-65-5954-440.p165-190

COMPREENSÃO DA OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO: ESTUDO COM REFERÊNCIA NA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

Sônia BESSA[1]

Introdução

Esse capítulo apresenta uma investigação com aporte na Epistemologia Genética realizada com estudantes de 3º ao 5º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de investigar o nível de compreensão da operação aritmética de multiplicação e as estratégias utilizadas ao se defrontarem com uma situação experimental envolvendo a multiplicação. Jean Piaget esclarece que a aprendizagem da Matemática é essencial, uma vez que um prejuízo nessa área redundaria numa deficiência nos próprios mecanismos do desenvolvimento do raciocínio. Para esse cientista, a Matemática é a lógica de todas as formas evoluídas do pensamento científico e todas as noções matemáticas principiam por uma construção qualitativa, antes de adquirirem caráter métrico (PIAGET, 2010). Dada a sua natureza qualitativa Piaget chama a atenção para a busca de métodos de ensino aprendizagem, experimentais que apelem para a ação sobre

[1] Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), e docente do Instituto Acadêmico de Educação e Licenciaturas e do Programa de Pós-Graduação em Gestão, Educação e Tecnologias (PPGGET) da Universidade Estadual de Goiás (UEG), Campus Formosa, Goiás, Brasil. E-mail: sonia.bessa@ueg.br

https://doi.org/10.36311/2024.978-65-5954-440-0.p165-190

o objeto do conhecimento, a reinvenção e a redescoberta pelos estudantes.

No ano 2017 foi lançada a portaria n.º 1.570 que instituiu e orientou a implantação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para a Educação Infantil e Ensino Fundamental (BRASIL, 2017). Esse documento apresenta para o ensino de aritmética unidades temáticas que se estendem do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental.

Para o primeiro ano do Ensino Fundamental na unidade temática "números", são propostos problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração como juntar, acrescentar, separar, retirar. No segundo ano, problemas com diferentes significados da adição e subtração; adição de parcelas iguais; estratégias e formas de registros pessoais. No terceiro ano, a multiplicação continua fundamentada nos fatos básicos da adição, incluindo cálculo mental ou escrito; problemas com diferentes significados da multiplicação e da divisão e problemas de multiplicação.

No quarto ano, problemas com diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, proporcionalidade, repartição equitativa e medida; problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, números racionais e frações unitárias e por fim no quinto ano, a unidade temática acrescenta representação fracionária dos números racionais como identificar frações equivalentes, ordenar e comparar números racionais positivos, cálculo de porcentagens e representação fracionária; problemas: multiplicação e divisão de números racionais; resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais utilizando estratégias diversas como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

A proposta é ousada, mas levanta alguns questionamentos perturbadores: está sendo levada em consideração a maturidade intelectual das crianças? Ou as características peculiares do desenvolvimento? Ao final do 5º ano compreenderiam as crianças a operação de multiplicação e divisão com números naturais e racionais?

O ensino da Matemática tem ocupado um espaço importante na formação escolar e o bom desempenho dos estudantes tem forte relação com a permanência na escola e com o abandono escolar, contudo, as práticas pedagógicas dos professores podem ainda estar ligadas a procedimentos empíricos ou aprioristas com ênfase nos algoritmos e na memorização mecânica de fórmulas e conceitos. Em pesquisa intercultural com docentes que ensinam Matemática do Brasil, Chile, Uruguai e Peru, Becker (2021) constatou paradoxos nas concepções de ensino aprendizagem dos professores: os docentes acreditam no surgimento precoce de noções matemáticas básicas, atribuindo-as à pressão do meio, mediante estimulação e repetição. Confundem construções lógicas, realizadas pela criança, do nascimento aos 7/8 anos, com noções matemáticas básicas. Atribuem seu surgimento à estimulação (fundamentada pela maturação), com desvalorização da ação do sujeito e de seu processo de desenvolvimento cognitivo.

Esse caminho encontrado nas concepções dos professores é oposto ao que a epistemologia genética de Jean Piaget tem colocado, que o conhecimento não se constitui numa cópia do real, mas consiste na ação do indivíduo ao "agir sobre ele e transformá-lo [...] em função dos sistemas de transformação aos quais estão ligadas estas ações" (PIAGET 1983, p. 15). É necessária uma estrutura que se origina das atividades do indivíduo. As estruturas cognitivas são, assim, construídas mediante a interação entre o sujeito e o objeto de conhecimento (FERRAZ; TASSINARI, 2015).

Piaget (2007, p. 13) esclarece que "[...] o conhecimento não poderia ser concebido como algo predeterminado nas estruturas internas do indivíduo", ou mesmo "[...] nos caracteres preexistentes do objeto, pois estes só são conhecidos graças à mediação necessária dessas estruturas".

Ao considerar a operação de multiplicação nosso objeto de estudo nessa investigação, constatamos que esta pode ser ensinada como se fosse a mera repetição da adição, com concepções hierárquicas que fragmentam o currículo (LARA, 2011), ou então de maneira transmissiva (KAMII; JOSEPH, 2005, BESSA; COSTA, 2017) usando como principal recurso a tabuada de multiplicação e o massivo uso de exercícios de treinamento. Essa perspectiva é fortemente não recomendada por Piaget (2010), Castro et al. (2016), Gitirana et al. (2014), Santos e Rodrigues (2019), Nunes, Carraher e Schliemann (2011), Mantovani de Assis (2017), Bessa e Costa (2019) e outros.

Piaget (1995), admite que a multiplicação é bem mais complexa que a adição, ao exigir processos mais elaborados de coordenações entre os elementos, uma vez que a adição consiste na reunião de objetos enquanto a multiplicação consiste em depreender o número de vezes. Como complementa Vergnaud (2011) ao realizar a multiplicação os estudantes elaboram operações de pensamento que implicam em raciocínio sobre quantidades e grandezas.

Granell (1983), com referência em Piaget, discute duas importantes aquisições quando se trata da multiplicação: uma delas é a possibilidade do estudante constatar a presença do "operador multiplicativo", o que lhe permitirá fazer antecipações do número "n" de conjuntos e outra aquisição é a capacidade de realizar uma compensação exata entre as duas variáveis: "n" – número de vezes ou de conjuntos e "x" – número de elementos de cada conjunto. A descoberta desse "operador multiplicativo" a que se refere Granell (1983) é condição necessária, porém não suficiente, para que o estudante compreenda a multiplicação, porque comporta em sua conceitualização, mecanismos oriundos da abstração reflexionante (PIAGET 1995) cada vez mais complexos. Becker (2021) com referência na epistemológica genética esclarece que são as abstrações reflexionantes resultantes da ação do sujeito, que permite a construção da noção de número e que, uma vez interiorizadas, transformam-se em operações de soma e subtração, de multiplicação e divisão, etc.

O "operador multiplicativo" conforme mencionado por Granell (1983) permite ao estudante antecipar o número do conjunto e a compensação do número de elementos de cada um deles. Quando o estudante utiliza o operador multiplicativo, simultaneamente utiliza estratégias de multiplicação e divisão para resolver as situações.

Estudos realizados por Mendes Brocardo e Oliveira (2013) com crianças no 3º ano do Ensino Fundamental apontaram que a aprendizagem da multiplicação se processa gradualmente de forma progressiva e com estratégias cada vez mais sofisticadas. Esses autores esclarecem que as relações entre as operações se estabelecem especialmente entre a adição, a multiplicação e a divisão. Os primeiros procedimentos dos estudantes ao iniciarem a multiplicação é utilizar a adição sucessiva.

Como proposto na epistemologia genética, a Matemática é um sistema de construções que, apoiado de início nas coordenações das ações e operações do sujeito, faz-se em uma sequência de abstrações reflexionantes de níveis sempre progressivos. A compreensão lógica dos conhecimentos incluindo a operação de multiplicação e divisão é função direta da construção de estruturas mentais (BESSA; COSTA 2019).

A perspectiva das operações aritméticas como um processo de construção é compartilhada por autores como Piaget e Zseminska (1981), Vergnaud (1990), Piaget (2003), Moro (2005), Kamii e Joseph (2005), Fávero e Neves, (2009), Lara (2011), Lara e Borges (2012), Mantovani de Assis (2017), Bessa e Costa (2019), Schreiber et al. (2019), Santos e Bessa (2021), Becker (2021) e outros.

Nesse contexto, este estudo tem como objetivo investigar a compreensão de multiplicação de estudantes do 3º ao 5º ano do Ensino Fundamental e quais estratégias utilizam para resolverem uma atividade experimental envolvendo a operação aritmética de multiplicação.

Procedimentos metodológicos

Para essa investigação de natureza empírica descritiva fundamentada na epistemologia genética foi constituída amostra aleatória com 109 crianças de escolas públicas (70) e particulares

(39) de duas unidades federativas: Goiás (77) e Distrito Federal (32). 24 deles frequentavam o 3º ano, 42 o 4º ano e 52 o 5º ano. A distribuição dos estudantes quanto a idade, ano escolar e gênero pode ser visualizada na tabela 1.

Tabela 1 – Caracterização da amostra: idade, ano escolar e gênero a que pertencem

		Gênero		
Ano escolar	**Idade**	**Masculino**	**Feminino**	**Total**
3º ano	8	9	12	21
	9	2	2	4
4º ano	8	5	6	11
	9	8	6	14
	10	2	4	6
	11	1	0	1
5º ano	9	2	1	3
	10	11	11	22
	11	11	8	19
	12	5	1	6
	13	1	1	2
	Total	57	52	109

Fonte: Dados da pesquisa

A fim de avaliar as condutas de multiplicação dos estudantes, foi utilizada uma atividade experimental com palitos que requeria a utilização das operações aritméticas de adição multiplicação e divisão.

A aplicação da atividade fundamentou-se no método clínico-crítico de Jean Piaget; as perguntas foram feitas com adaptações necessárias ao contexto e à idade dos participantes e requeriam diferentes níveis de elaboração pelo estudante. Em algumas, o nível de informação disponível é investigado; em outras, busca-se a descrição de um processo e, ainda em outras, são solicitadas explicações conceituais que requerem maior elaboração por parte do estudante. Essa dinâmica de trabalho fundamenta-se no método clínico-crítico (PIAGET, 2005), que consiste em uma intervenção sistemática do pesquisador em função do que o participante vai dizendo ou fazendo.

A atividade foi dividida em duas partes: entrega-se ao estudante uma quantidade de palitos (de picolé) e pede-se que ele faça o maior número de figuras com dois, três e quatro palitos respectivamente. A pesquisadora pergunta-lhe quantos palitos usou ao todo, como chegou àquele resultado e se havia outra maneira de descobrir o total de palitos. Após fazer essa atividade com dois, três e quatro palitos, é proposto ao estudante uma quantidade "X" de palitos (12, 15 e 18) e pergunta-se quantas figuras diferentes ele pode fazer usando a mesma quantidade, sem sobrar nem faltar palitos. Uma vez concluída a proposta com 12 palitos, é realizado o mesmo procedimento com 15 e 18 palitos respectivamente.

Essa atividade experimental foi utilizada por Zaia (2013), e adaptada até chegar à versão final, apresentada nessa investigação. Foram organizados seis níveis de compreensão do mais elementar ao mais complexo: IA, IB, IIA, IIB, IIIA e IIIB para explicar a evolução do pensamento do estudante.

Nível IA – O estudante não chega à consciência do número de vezes que pegou determinada quantidade de palitos para fazer figuras. O pensamento está centrado sobre os palitos de cada figura, ou sobre a quantidade total, não coordena parte e todo. Não acredita que pode obter a mesma quantidade total a partir de figuras feitas com outras quantidades parciais.

Nível IB – Consegue tomar consciência do número de figuras feitas ou do número de vezes que pegou determinada quantidade de palitos, mas não acredita que com a mesma quantidade, possa construir figuras de quantidades diferentes, sem sobrar ou faltar palitos. Realiza a maioria dos procedimentos por tentativa e erro.

Nível IIA – A multiplicação é parcialmente compreendida como adição de adições, não têm consciência da operação "N vezes X" (operador multiplicativo). Quando consegue obter a mesma quantidade total a partir das figuras o faz por tentativa e erro, sem recorrer a antecipações mentais.

Verifica-se o início da compensação necessária, embora intuitiva e, qualitativa, pela qual se conclui que para obter com a mesma quantidade de palitos o maior número de figuras é necessário que cada uma delas tenha menos palitos, ou que uma quantidade menor de figuras deve ter mais palitos cada uma.

Nível IIB – Antecipa composições possíveis, realiza cálculo mental, mas predomina procedimentos aditivos, ocasionalmente refere-se a procedimentos multiplicativos, e quando o faz utiliza materiais como palitos, dedos, marcas de contagem e/ou outras representações pictóricas.

Nível IIIA – Utiliza procedimentos multiplicativos por cálculo mental, mas não compreende ou utiliza a reversibilidade necessária à operação de divisão, reconhece parcialmente os divisores de 12, 15 e 18 recorrendo à multiplicação.

Nível IIIB - Alcança a reversibilidade necessária à operação de divisão, calculando mentalmente e simultaneamente a partir da multiplicação e divisão, reconhece os divisores de 12, 15 e 18 recorrendo à multiplicação e/ou à divisão.

Essa investigação seguiu os princípios éticos propostos em pesquisas com seres humanos e os procedimentos aprovados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Goiás (UEG). A atividade experimental foi aplicada individualmente, após a autorização dos pais ou responsáveis terem assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) com a garantia de anonimato e confidencialidade das informações.

A coleta de dados foi realizada em sala reservada pela equipe gestora das instituições. A duração da aplicação da entrevista individual foi de aproximadamente 30 minutos, no mês de setembro de 2019, com gravação em vídeo para transcrição e análise posterior da pesquisadora. A transcrição da fala dos participantes foi feita em forma de protocolos, com registro minucioso, inclusive gestos, olhares e reações dos estudantes durante a atividade.

Resultados e discussão

Após a transcrição dos dados, foi feita a classificação das respostas de acordo com os níveis apresentados por Zaia (2013) e o ano escolar a que pertenciam os estudantes. O gráfico 1 apresenta a distribuição dos níveis encontrados.

Tabela 2 – Níveis de noção de multiplicação e ano escolar

	Níveis noção de multiplicação						
Ano escolar	**IA**	**IB**	**IIA**	**IIB**	**IIIA**	**IIIB**	**Total**

3º ano	4,0%	44,0%	24,0%	16,0%	12,0%	-	100,0%
4º ano	-	28,1%	40,6%	15,6%	15,6%	-	100,0%
5º ano	-	17,3%	21,2%	17,3%	36,5%	7,7%	100,0%
Total	0,9%	26,6%	27,5%	16,5%	24,8%	3,7%	100,0%

Fonte: Dados da pesquisa

Níveis IA e IIIB, o mais elementar e o mais evoluído, têm percentual reduzido de estudantes. Os estudantes do 3º ano têm uma evolução menor que os demais com maioria (44%) no nível IB. O 4º e 5º anos tem percentuais próximos nos níveis IB (28,1% e 17,3%) e IIB (15,6% e 17,3%), sobressaindo-se o 5º ano nos níveis IIB (17,3%), IIIA (36,5%) e IIIB (7,7%). Nenhum estudante do 3º ou 4º ano estava no nível IIIB. Paradoxalmente, num mesmo ano escolar tem estudantes de níveis bem elementares e mais evoluídos, isso ocorreu em todos os três anos investigados.

Estudantes de 4º e 5º ano tiveram melhores níveis de compreensão de multiplicação, no 5º ano, 36,5% estavam no nível IIIA enquanto o 4º ano 15,6% e o 3º ano 12,0%, contudo, ainda existe um percentual alto de estudantes do 5º ano no nível IB (17,3%) e no nível IIA (21,2%) que soma 38,3% dos participantes.

O maior percentual de estudantes da amostra estava no nível IIA (27,5%), esse representa uma evolução em relação ao IB e IA, mas ainda é pouco satisfatória para os estudantes de acordo com as habilidades requeridas pela BNCC.

No nível IIA os estudantes passam a acreditar na possibilidade de obter a mesma quantidade total de palitos a partir de figuras com outras quantidades de palitos, contudo, não conseguem fazer antecipações e recorrem com frequência ao material concreto (retorno empírico) para confirmar o pensamento. Verifica-se nesse nível o início de um processo de tomada de consciência do número de operações correspondente a "*n* vezes *x*", sendo *n* o número de vezes que se pega os palitos ou o número de figuras e *x* o número de palitos de cada figura. O estudante nesse nível, descobre a compensação necessária, mas ainda intuitiva, pela qual se conclui que para obter, com a mesma quantidade de palitos, o maior número de figuras, é necessário que cada uma das figuras tenha menos palitos, ou que uma quantidade menor de figuras tenha mais palitos cada. A multiplicação é compreendida como adição de adições, sendo que o sucesso é alcançado por via aditiva, sem plano e sem tomada de consciência da operação *n* vezes *x*.

O estudante A.[2], de 11 anos, está no nível IIA e é do 5º ano de escola pública do DF. A. recebeu uma quantidade de palitos e foi solicitado que fizesse figuras diferentes com 2 palitos por um período de 15 segundos. Rapidamente A fez 8 figuras com 2 palitos.

> P.: Quantas figuras você fez? A.: 8. P.: Quantos palitos você usou ao todo? A.: 16 (parou olhou detidamente e conferiu mais de uma vez pra ver se tinha mesmo 16 palitos) P.: Como fez para descobrir? A.: Na mente, contei antes de fazer as figuras. P.: Como? A.: Contei de 1 em 1. P.: Teria outro jeito de descobrir, diferente desse? A.: Contando de 2 em 2, ou assim: 2 – 4 – 6 – 8. P.: teria outro jeito diferente desse? A.: Não sei, estou em dúvida. (pensou um pouco, ficou olhando para os palitos antes de responder. P.: Um menino da outra escola, da sua idade me disse que daria para saber fazendo 2 X 8 ou então 8 X

[2] Será utilizada a primeira letra do nome para proteger a identidade do estudante e a letra P para designar a pesquisadora.

> 2, o que você acha ele está certo ou errado? A.: Sim daria, pode ser pela tabuada de vezes.

O estudante fazia agrupamentos com dois, três ou quatro palitos e sempre mencionou as mesmas formas de calcular (contando de dois em dois, três em três ou de quatro em quatro). Antes de fazer as figuras separava rapidamente os palitos conforme a solicitação em dois, três ou quatro e ia montando as figuras, mas sempre utilizando o procedimento aditivo, mesmo diante de contra-argumentos, chegou a reconhecer a operação de multiplicação, mas alegou que preferia usar a adição.

Para a segunda situação, 12 palitos foram entregues a A. e foi solicitado que fizesse figuras usando a mesma quantidade, sem deixar sobrar ou faltar palitos. Como ele estava tendo dificuldade de entender o que fora solicitado, foi sugerido que ele montasse figuras com um, dois, três, quatro, seis e 12 palitos, que são os divisores de 12. A. pegou os palitos, contou e foi separando em agrupamentos de três em três, obtendo, assim, quatro figuras.

> P.: Quantas figuras você fez? A.: Fiz quatro de três. P.: Qual é o total de palitos? A.: 12. P: Como fez para descobrir? A.: Contando de três em três. P.: Poderia contar de outra forma? A.: Só se for 4 × 3. (A. admitiu a possibilidade de utilizar a multiplicação) P.: Com seus palitos, você poderia fazer figuras com outras quantidades em cada uma, sem sobrar nem faltar? Por quê? A.: Sim, mas não sei por quê. P.: E se você tentasse com dois palitos, daria? A.: Sim, com dois dá, porque esses que sobrar eu junto com os outros.

O estudante conseguiu fazer figuras com 3, 4, 2 e 6 palitos, mas de forma intuitiva por tentativa e erro e mediante sugestões da pesquisadora e contra-argumentos. Foram-lhe entregues 15 palitos para que fizesse a mesma coisa. Era esperado que ele fizesse figuras utilizando um, três, cinco e 15 palitos. Depois de tateios, A. fez cinco figuras com três palitos.

> P.: Você tem certeza de que usou o mesmo número de palitos em cada figura? Como você fez para descobrir? A.: Tentei com dois palitos, não deu. Então tentei com quatro e também não deu, aí deu com três. P.: Como você fez para descobrir? A.: Contei de três em três. P.: Será que teria outro jeito de você contar? Um menino da sua idade me disse que poderia ser 5 × 3. O que você acha disso? A.: Sim poderia ser. Dá pra contar 5 × 3. (Nesse momento ficou meio eufórico, com a descoberta). P.: Tem certeza? A: Sim, porque eu contei 5 × 3 de três em três. Sim, mas não tenho certeza, mas dá para fazer com três palitos (embora feliz por ter descoberto outro caminho, teve um recuo e não admitiu que poderia fazer três figuras de cinco ou cinco figuras de três).

O estudante A., teve dificuldade no cálculo mental e recorreu muitas vezes ao suporte empírico. Utilizava o termo multiplicação, mas não ficou claro que compreendia o elemento multiplicador e o pensamento hierárquico requerido para essa operação. Como esclarece Kamii e Joseph (2005), a multiplicação requer o pensamento hierárquico numa relação de um para muitos, assim, para multiplicar 3 x 5 o estudante precisará transformar por cálculo mental 5 unidades em 3 cinco, e vice-versa, sendo essas três unidades de cinco de uma ordem superior.

No Nível IIIA foram encontrados 24,8% dos participantes, sendo que a maior representatividade estava no 5º ano. Nesse nível, já é frequente o cálculo mental e a percepção do "operador multiplicativo" descrito por Granel (1983); contudo, o recurso da reversibilidade (divisão) ainda está ausente. Em algumas ocasiões, os estudantes utilizaram a divisão como um processo multiplicativo. Analisemos o caso da estudante A.J. do 5º ano (10 anos) de escola goiana.

> P.: Quantas figuras você fez? A.J.: Duas. P.: Quantos palitos você usou ao todo? A.J.: Usei quatro palitos. P.: Como você fez para descobrir? A.J.: Fiz a conta de 2 × 2 (respondeu rapidamente). P.: De que outro jeito você poderia fazer? A.J.: 2 + 2, ou de um em um.

A estudante utilizava com frequência a multiplicação como primeira opção, mas referiu-se a outras formas por agrupamentos, 3 + 3 + 3 ou 3 × 3, ou por unidades, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Na segunda parte da atividade (divisão), foi solicitado que A.J. fizesse figuras usando 12 palitos, com a condição de não faltar ou sobrar palitos. Era esperado que a estudante fizesse figuras com os divisores de 12. A.J. começou fazendo seis figuras com dois palitos e disse: "descobri quantos palitos tem aqui porque contei 6 + 6". Posteriormente, fez o mesmo com três e quatro palitos em cada figura e recorria ao cálculo mental. Foi na sequência – dois, três, quatro e, ao chegar ao cinco, disse: "vai sobrar palitos e não vai dar para usar os 12, e sobrou porque já tinha o máximo de figuras com os palitos".

> P.: Acabou, não dá pra formar mais nenhuma figura? A.J.: Sim, com seis palitos (foi capaz de identificar quatro dos seis divisores de 12, não relacionou os divisores 1 e 12. Só o fez mediante contra-argumento) P.: E poderia ser uma figura com 12 palitos. A.J.: Sim, poderia. P.: E se fossem 12 figuras de um palito cada? A.J.: Também pode. Com 15 palitos a estudante procedeu com rapidez e por cálculo mental a divisão com 15 palitos, mas referiu-se à multiplicação. P.: Com esses palitos (15) quantas figuras você pode formar sem faltar ou sobrar? A.J.: 3 figuras de 5 cada. P.: como você sabe isso? A.J.: porque 3 X 5 = 15. P.: Teria outro jeito de você saber? A.J.: 5 + 5 + 5 ou 1+1+1+1+1 até chegar no 15. P.: Uma colega sua me disse que poderia dividir 15 por 3 ou por 5, o que você acha disso? Esta está certa ou errada? A.J.: está certa. Pode ser assim também.

A estudante pensou rápido, fez cálculo mental, reconheceu a multiplicação, adição, e divisão, mas ainda prefere utilizar a multiplicação para chegar a divisão. Não tem fluência na utilização da divisão, embora admita que ela possa ser usada. Investigação de Bessa e Costa (2019) constatou que em situações de divisão por quotas, ou partitivas, os estudantes utilizam a operação inversa à divisão, ou seja, a multiplicação.

Somente 4 (3,7%) estudantes de um universo de 109 conseguiram compreender a operação "*n* vezes *x*" por antecipação mental, sem o auxílio de suporte empírico. Eles utilizaram estratégias multiplicativas por cálculo mental e compreenderam a reversibilidade necessária à operação de divisão.

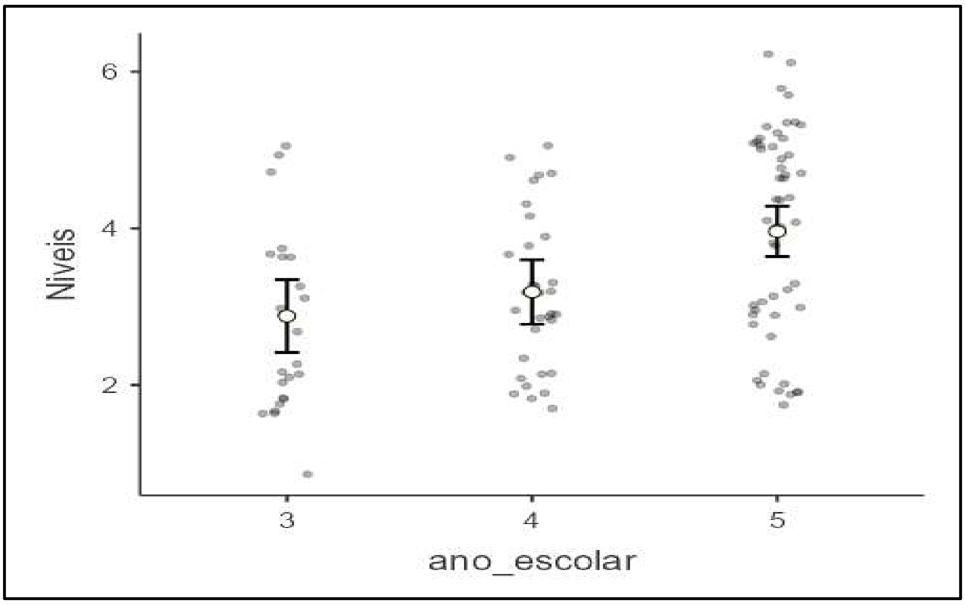
Poucos estudantes recorreram ao cálculo mental, tiveram dificuldades de antecipação dos resultados e os estudantes do 3º e 4º ano utilizaram com frequência procedimentos aditivos como estratégia para a formação dos grupos, e recorriam a procedimentos empíricos como contar nos palitos ou nos dedos, enquanto aqueles de 5º ano utilizaram com mais frequência procedimentos multiplicativos.

O que chamou a atenção nesse estudo foi o fato de crianças de 3º, 4º e 5º ano, mesmo frequentando a mesma turma, estarem em níveis tão diferentes da compreensão de multiplicação. No caso do 5º ano, 17,3% estão no Nível IB e 21,2% no nível IIA, 17,3% no nível IIB, 36,5% no nível IIIA e somente 7,7% no nível IIIB que seria o esperado para toda a turma. O mesmo ocorreu com as turmas de 3º e 4º anos, mas com percentuais menores nos níveis mais evoluídos. O 3º ano, por exemplo, tem um estudante no nível IA e 44% no nível IB e somente 12% no nível IIIA. Porque estudantes de mesmos anos escolares, tem níveis de compreensão de multiplicação tão heterogêneos?

Nesse sentido, Piaget e Inhelder (2011) esclarecem que o ser humano traz no genoma possibilidades que podem ou não se atualizar, mas a atualização das estruturas mentais específicas para o ato de conhecer está condicionada à solicitação do meio. Inhelder, Bovet e Sinclair (1977) complementam ao afirmar que as aquisições de noções operatórias obedecem a leis gerais do desenvolvimento e que o atraso ou a precocidade poderiam ser explicadas pelo grau de solicitação exercida pelo meio.

A fim de verificar se o ano escolar tinha efeito sobre os níveis encontrados foi feito o teste estatístico ANOVA *one way*, como não verificou-se homogeneidade da distribuição foi feito a correção de Welch e constatou-se significância ($F(2,121) = 5,16$; $p=0,007$ $n^2p = 0,079$. O gráfico a seguir mostra que houve uma evolução nos níveis de multiplicação, estudantes de 5º ano tiveram melhores resultados. Contudo, os participantes em geral tiveram um resultado bem elementar em relação aos níveis de multiplicação.

Figura 1 – Níveis de compreensão de multiplicação e ano escolar



Fonte: Dados da pesquisa

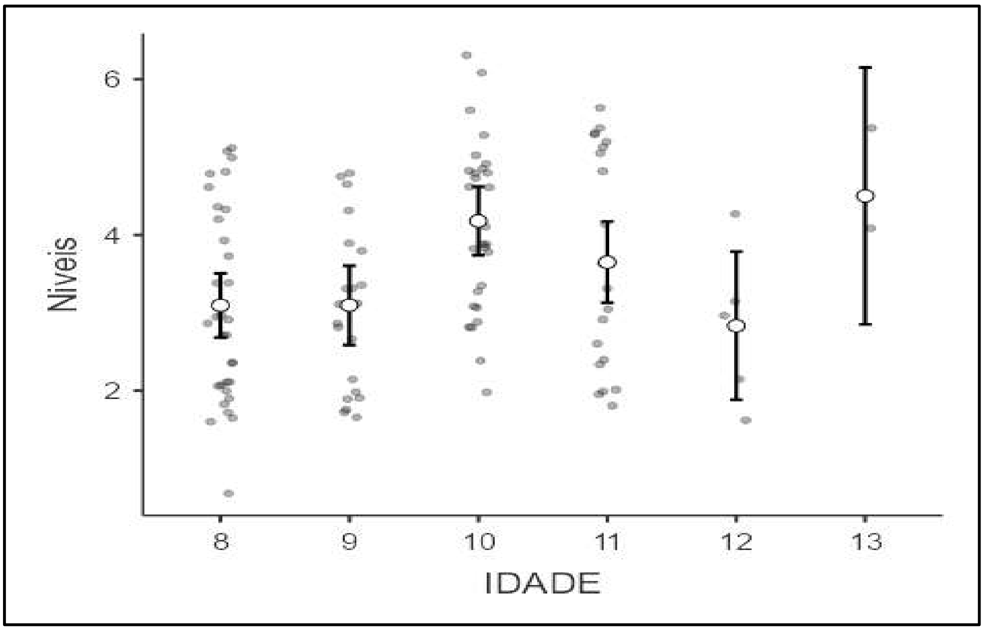
A fim de verificar onde se concentrava a significância, foi feito o *post hoc* de Tukey, em que a média do 3º ano foi de 2,92, do 4º ano foi de 3,19 e o 5º ano de 3,75. Os resultados do 3º e 4º ano foram similares, sem significância, mas entre o 3º e 5º ano foi verificada significância $p=0,001$ e entre o 4º e 5º ano $p=0,0011$ também, como pode ser verificado na Figura 1. Os intervalos de confiança que não se cruzam representam diferenças amostrais significativas com 95% de confiança, temos diferenças entre os estudantes do 5º ano (média de 3,75) e estudantes do 4º ano (3,19) e o 3º ano (2,92). Um percentual maior de estudantes do 5º ano estava nos níveis IIIA e IIIB.

Nessa investigação parece que o ano escolar foi importante para melhores níveis de compreensão de multiplicação, mas na perspectiva de Piaget (2011) a maturação e a experiência se implicam mutuamente, se a aprendizagem for analisada pelo ponto de vista da maturação podemos incorrer no pensamento apriorista ou ainda se for resultado da experiência cairemos no outro oposto o empirismo. Para o construtivismo de Piaget o processo de equilibração [3] explicaria o desenvolvimento e coordenaria os três fatores maturação; experiência física e lógico-matemática; e as interações e transmissões sociais, implicando regulações e autorregulações, aplicadas a qualquer área do conhecimento.

A idade também teve influência nos resultados encontrados, segundo a ANOVA de duas vias ($F(5,116) = 2{,}33$; $p=0{,}046$) $n^2p = 0{,}091$.

Figura 2 – Níveis de compreensão de multiplicação e idade

[3] Piaget e Inhelder (2011) afirmam que a equilibração ou autorregulação é um dos quatro fatores que garantem o desenvolvimento humano, embora seja frequentemente negligenciado. O equilíbrio depende da ação do sujeito ativo sobre os distúrbios externos e, ao mesmo tempo, da ação desses sobre aquele. Há uma "sequência de compensações ativas do sujeito em resposta às perturbações exteriores e de regulagens, ao mesmo tempo retroativas (sistemas de anéis ou feedbacks) e antecipadoras, que constitui um sistema permanente de tais compensações" (PIAGET; INHELDER, 2011, p. 139). Dessa forma, o desenvolvimento se dá por uma constante busca de equilíbrio, que significa a adaptação dos esquemas existentes ao mundo exterior.



Fonte: Dados da pesquisa

No gráfico 2 de barra do erro das variáveis níveis de compreensão de multiplicação e de idade, os intervalos de confiança que não se cruzam representam diferenças amostrais significativas com 95% de confiança. O teste *post hoc* Tukey mostrou significância entre os estudantes de 8 e 10 anos p=0,007, e entre 9 e 10 anos, p=0,023. A idade de 10 anos coincidiu com o 5º ano assim estudantes com idade de 10 anos cursando o 5º ano foram os que alcançaram os melhores níveis de compreensão de multiplicação. Não foi verificada significância entre o gênero, nas duas unidades federativas de Goiás e Distrito Federal e no tipo de escola frequentado: pública ou particular, do DF ou de Goiás e do gênero masculino ou feminino. Conclui-se que esses diferentes grupos têm noções similares quanto a multiplicação.

Considerações finais

Somente 3,7% dos estudantes tem fluência na utilização da multiplicação e divisão utiliza o cálculo mental e o pensamento reversível para chegar ao resultado. Pelos resultados encontrados somente 28,5% dos estudantes dos níveis IIIA e IIIB teria condições de compreender satisfatoriamente a operação de multiplicação.

Estudantes de 3º ao 5º ano mesmo pertencendo a mesma turma mostraram diferenças quanto aos níveis de compreensão de multiplicação. No 4º ano por exemplo 28,1% estão no nível IB, 40,6% no nível IIA, e 15,6% nos níveis IIB e IIIA, esses resultados demonstram que esses estudantes utilizam procedimentos e estratégias intuitivas e espontâneas como contagem, símbolos pictóricos, dedos ou a contagem das unidades nos palitos para resolver a atividade experimental.

As estratégias dos estudantes do 3º e 4º anos incluíram preferencialmente procedimentos do tipo aditivo, utilizando esquemas como contar de um em um, ou de dois em dois, separar os palitos em agrupamentos e contar a partir das unidades ou do agrupamento. Mediante contra-argumentos reconheciam o princípio multiplicativo, mas preferiam utilizar o procedimento aditivo deixando transparecer a dificuldade em utilizar os procedimentos multiplicativos. Um percentual maior de estudantes do 5º ano recorreu com mais frequência aos procedimentos multiplicativos.

O nível acadêmico e a idade apresentaram diferenças significativas, os estudantes do quinto ano e ocasionalmente com idade entre 9 e 10 anos se sobressaíram nas condutas mais evoluídas em relação aos estudantes do 3º e 4º anos.

A coexistência de níveis elementares e mais evoluídos num mesmo ano escolar pode ser atribuído as estruturas mentais que estão condicionadas à solicitação do meio e obedecem a leis gerais do desenvolvimento.

Os melhores níveis de compreensão de multiplicação dos estudantes do 5º ano podem estar relacionados ao processo de equilibração que coordenaria a maturação; experiência física e lógico-matemática; e as interações e transmissões sociais, implicando regulações e autorregulações.

Este estudo evidenciou a compreensão da operação de multiplicação, com uma amostra restrita de estudantes, e necessita ser objeto de outras investigações quanto aos processos cognitivos conferindo amplitude à análise de intervenções pedagógicas.

Referências

BECKER, F. Gênese de noções matemáticas elementares: concepções epistemológicas subjacentes às respostas de docentes de Matemática de três países sulamericanos. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 70, p. 588-613, ago., 2021.

BESSA, S; COSTA, V. G. Operação de multiplicação: possibilidades de intervenção com jogos. **Rev. bras. Estud. Pedagog**, v. 98, n. 248, p. 130-147, jan./abr., 2017.

BESSA. S; COSTA, V. G. Apropriação do conceito de divisão por meio de intervenção pedagógica com metodologias ativas. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 63, p. 155-176, abr., 2019.

BRASIL. **Base nacional curricular comum**: educação é a base. 3. ed. Brasília: MEC, 2017.

CASTRO, E. R. et al. Estudos sobre o ensino de estruturas multiplicativas nos anos iniciais do ensino fundamental: revelações do estado da questão. **Educ. Matem. Pesq.,** São Paulo, v. 18, n. 2, p. 825-842, 2016.

FAVERO, M. H; NEVES, R. S. P. Competências para resolver problemas e para analisar a resolução de problemas: um estudo junto a professores, licenciandos, pedagogos e psicólogos. **Psicol. Esc. Educ**., Campinas, n. 1, v. 13, 2009.

FERRAZ, A. A; TASSINARI, R. P**. Como é possível o conhecimento matemático?** As estruturas lógico-matemática a partir da Epistemologia Genética. São Paulo: Editora UNESP/Cultura Acadêmica, 2015.

GITIRANA, V. et al. **Repensando a multiplicação e a divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: Ed. PROEM Ltda. 2014.

GRANELL, C. G. Processos cognitivos en aprendizagem la da multiplicación. In: MONTSERRAT, M. (Org). **La pedagogia operatória** – um enfoque constructivista de la educación. Barcelona: Editorial Laia, 1983. p. 53-64.

INHELDER B.; BOVET, M.; SINCLAIR, H. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento**. São Paulo: Saraiva, 1977.

LARA, I. C. M. O uso da estrutura multiplicativa na resolução de problemas nos anos iniciais da educação básica. Santa Matra-RS. **VIDYA**, v. 31, n. 2, p. 105-122, jul./dez., 2011.

LARA, I. C. M; BORGES, R. A resolução de problemas de divisão partitiva nos anos iniciais do ensino fundamental. **VIDYA**, n. 1, v. 32, p. 9-20. 2012.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética**. Porto Alegre: ArtMed, 2005.

MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. Proepre: Programa de educação infantil e ensino fundamental e a teoria de Jean Piaget. **Revista Schème**. Marília, v. 9, n. esp., 2017.

MENDES, F.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Uma evolução dos procedimentos assistidos pelos alunos: contribuidor de uma experiência de ensino centrado na multiplicação. **Quadrante**, v. 22, n. 1, p. 133-162, 2013.

MORO, M. L. F. Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Curitiba, n. 21, v. 2, p. 217-226, 2005.

NUNES, T; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN. A. L. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

PIAGET, J; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Trad. Christiano Monteiro Oiticica. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

PIAGET, J. Psicogênese dos conhecimentos e seu significado epistemológico. In: **Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem**. São Paulo: Cultrix/Edusp, 1983.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**. Porto Alegre: Artmed, 1995.

PIAGET, J. **Biologia e conhecimento**. 4. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2003.

PIAGET, J. **A representação do mundo na criança**. São Paulo: Ideias & Letras, 2005.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

PIAGET, J. **Psicologia e pedagogia**. 9. ed. Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária, 2010.
PIAGET, J. **Para onde vai a educação**. São Paulo: José Olympio. 2010.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A psicologia da criança**. 7. ed. Trad. Octávio Mendes Cajado. Rio de Janeiro: Difel, 2011.

SANTOS, S; ROGRIGUES, M. O desenvolvimento da flexibilidade do cálculo multiplicativo em alunos do 3.º Ano. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 542-567, ago., 2019.

SANTOS, R. M.; BESSA, S. Operação aritmética de multiplicação: compreensão de estudantes do 5o e 6o anos do ensino fundamental. **Rev. Ensino de Matemática em Debate**, v.8, n. 1, 2021.

SCHREIBER, K. P. et al. Níveis de compreensão do conceito de média aritmética de adolescentes a partir do método clínico-crítico piagetiano**. Bolema,** Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 491-512, ago., 2019.

VERGNAUD, G. *La* **théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Editora da UFPR. 2009.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista,** Curitiba, n. esp., p. 15-27, 2011.

ZAIA, L. L. Estruturas operatórias concretas – os agrupamentos. In: MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. (Org.). **PROEPRE**: fundamentos teóricos para o Ensino Fundamental. 2. ed. Campinas: Book Editora: 2013. p. 187-197.